

使用 3 維圖解法於天文航海之教學與學習

Teaching and Learning Celestial Navigation Using A 3D Graphic Method

蔡金城*、曾維國**、孫逸家*、謝秉倫*、郭宗霖*、李軒宇*

摘要

長久以來，海事院校的學生計算天文航海問題時，皆採用視查表法(sight reduction method)而忽視了天文航海的基本定位原理，往往無法對天文航海產生學習的動機與興趣。本文為使天文航海的學習更加有效率，使用動態幾何代數軟體(dynamical algebraic geometry software)及電子地圖服務(web mapping)以 3 維圖解法(graphical method)的方式來取代傳統的教學，在不需要任何球面三角公式的情況下，可以完成天文航海的計算，使學習變得更簡單更有趣。

關鍵詞：天文航海、動態幾何代數軟體、電子地圖服務、3 維圖解法

Abstract

Maritime college students have long used the sight reduction method for celestial navigation calculations, but neglected the basic positioning principle of celestial navigation. Therefore, they often fail to generate motivations and interests in learning this form of navigation. In order to make celestial navigation learning more efficient, this study replaces traditional teaching with a 3D graphical method through dynamical algebraic geometry software and web mapping. In this way,

* 蔡金城 King-Cheng Tsai，國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科專任教師。Email: tcc650620@gmail.com

** 曾維國 Wei-Kuo Tsen，國立臺灣海洋大學商船學系教授。Email: wilco@yahoo.com.tw(通訊作者)

* 孫逸家 Yi-Jia Sun，國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科代理教師。

* 謝秉倫 Ping-Lun Hsieh，國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科學生。

* 郭宗霖 Zong-Lin Guo，國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科學生。

* 李軒宇 Syuan-Yu Li，國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科學生。

students can solve celestial navigation calculations without any formula of spherical trigonometry, and learning becomes easier and more interesting.

Keyword: celestial navigation, dynamical algebraic geometry software, web mapping, 3D graphic method

壹、緒論

17 世紀末，偉大的蘇格蘭天文學及數學家約翰奈皮爾(John Napier)先生耗費了近 20 年的時間，終於在 1714 年發明了對數(logarithm)[1]。主要的目的是為了簡化當時複雜的球面三角(以下簡稱球三)應用於天文學的計算。約翰奈皮爾先生透過對數簡化了球三的計算方法，讓他在數學史上被重重的記上一筆。這位航海數學學者的先驅者對於後世航海教育的影響非常深遠，而他化繁為簡的研究精神也深深的影響著我們。

傳統上，航海人員均是著重於手工海圖作業完成海上航行的任務。而天文定位法則是使用相對較大比例尺的麥卡脫海圖，以薩姆納位置線法(Sumner's LOP Method)或馬爾克·聖希萊爾法(Marcq Saint-Hilaire method)以下稱截距法(Intercept Method; IM)或稱高度差法(Altitude difference method)進行天文定位(celestial fix)，這些方法可在許多教科書中尋得[2-8]。

近年來，研究天文定位方法(celestial positioning)方面，受電腦與網路發展所賜，許多學者陸續使用三角方程(Trigonometric equation)、向量法(Vector method)、最佳化演算法(Optimization Algorithm)以及使用 Matlab 開發截距法(Intercept method)及改良式薩姆納位置線(Summer Line)法之應用程式來解算天文定位(celestial fix)[9-15]。最近則有使用牛頓法(Newton-Raphson method)及封閉解析解法(Closed analytical solution)，搭配電子地圖服務(Web Mapping)及 Javascript 開發的計算天文定位的使用者介面網頁[16]。以及重建 1837 年薩姆納船長(Captain Sumner)發現天文位置線(celestial position line)又稱薩姆納位置線(Summer Line)之場景，並且應用於天文航海教學上[17]。

以上方法除原有之演算法外，均需將演算法進程式編程，方能計算天文定位。然而，天文定位所使用之理論基礎均來自於球面三角，很可惜一般學生對球三的計算已不如過去來得有興趣。而使用電腦圖解法(graphical method)將使用於天文航海之天子午線平面圖解(celestial meridian plane diagram)成功的解算大圓航法相關計算[18]，則大大提升了學生學習的興趣。此為本文之靈感來源之一。

在天文航海教科書中，天子午線平面圖解(celestial meridian plane diagram)是以 2 維圖形呈現[7]，初學者不容易理解，且手工作圖大約會有 $2\sim 3^\circ$ 之誤差，此誤差因人而異，繪圖之正確度令人存疑。使用電腦圖解法，將可完全消除此項誤差，且 3 維圖形較適合初學者學習。本文秉持化繁為簡的研究精神，利用動態幾何代數軟體(Dynamical algebraic geometry software)，透過 3 維的電腦圖解法解算天文定位問題。不同於 2 維的天子午線平面圖解(celestial meridian plane diagram)，3 維圖形更顯真實與直觀，而且對空間操作的隨意性也較 2 維圖形佔優勢。

本文所使用的天文定位數據，皆由幾位學生同時也是本文協同作者使用六分儀實際進行測量。原本選於淡水河口搭乘「協同作者」家中私有遊艇進行觀測，不巧的是，秋冬季節於淡水河口觀測太陽，僅能於午後實施，且方位不佳，經「協同作者」建議，擇日改至三貂角燈塔園區進行觀測，進而順利搜集了此次所使用的天文觀測資料。由於所觀測的天體為太陽，並且使用天文航進定位(Running Fix; RFix)來進行定位。

觀測太陽的天文航進定位又可稱為 Sun-Run-Sun 定位方法。觀測者於白天天候狀況許可下，均可測量太陽，而測量其他天體較易受到局限，往往僅能於曙昏(twilight)進行。因此，觀測者於白天選定 3~4 小時內，連續觀測太陽 2~4 次，即可使用 Sun-Run-Sun 定位方法進行天文航進定位[19]。

最後透過使用 3 維圖解法及電子地圖服務，分別使用小圓交叉定位法(cross small circle method)、薩姆納位置線法(Summer LOP method)及截距法(IM)將定位的結果一一呈現，最後再與 GPS 定位進行比對以分析三種定位法的準確度。此外，亦可將成果透過天文航海課程呈現出來，使初學的學生可以更迅速理解天文定位的定位原理。

貳、天文定位基本原理

天文航海的基本定位原理源自於三邊測量(trilateration)，是常見的測距定位法[20]。使用於天文航海時，天體地理位置(geographic position; GP)為三邊測量的已知位置點，天體餘高度(90° -altitude)也就是天頂距(zenith distance)為天文船位至已知位置點的距離(半徑)，將可獲得兩個天文船位，如圖 1。

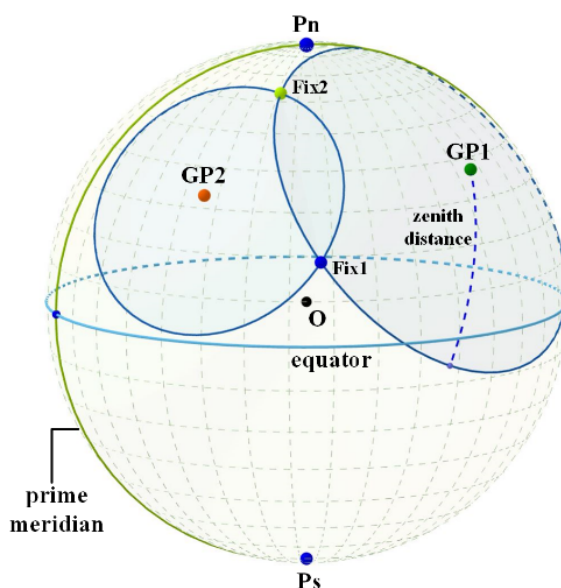


圖 1 三邊測量應用於天文定位

傳統天文航海定位，必須歸功於 19 世紀的兩位偉大的航海家，美國商船船長湯馬斯·哈伯德·薩姆納(Captain Thomas Hubbard Sumner)及法國海軍少將馬爾克·聖希萊爾(Marcq Saint-Hilaire)。一個多世紀以來，薩姆納的位置線法與馬爾克·聖希萊爾的截距法(IM)並稱為現代天文航海的兩大支柱[21]。同時已然深深的影響了天文航海的教學，分述如后。

2-1 薩姆納船長位置線法

1837 年美國商船船長湯馬斯·哈伯德·薩姆納由南卡羅來納州航行到蘇格蘭的旅程中發現了天體等高度圈(circle of equal altitude)，並將其命名為等高度平行圈(parallel of equal altitude) [21]。我們把時間回到 1837 年 12 月 17 日當天，薩姆納船長的船舶航行至威爾士(Wales)海岸時，由於當時天候惡劣，無法確定自己的船位。大約在上午 10:15 時，突然雲開見日，使他可以使用六分儀測得太陽之高度，並且記錄下經線儀(chronometer)的時間。他使用當時的推算緯度(Dead Reckoning Latitude)及觀測的數據得到了經度，這個方法稱為經線儀求經法(Longitude by Chronometer)。這個方法的緯度的準確度將影響到所得的經度。由於薩姆納船長並不信任當時的推算緯度(DR Latitude)，於是他將推算緯度分別加 10 分及 20 分，分別計算這三個緯度的各別經度。無意間發現他所計算的 3 個位置都位於同一條直線上。而這條直線恰好穿過史莫爾斯燈塔(Small's Lighthouse)。這是薩姆納船長的推斷，事實上他也沿著這條直線航行，發現了莫爾斯燈塔。這條直線就是著名的薩姆納位置線，也是現代天文航海技術發展的轉捩點[20]，如圖 2 所示。

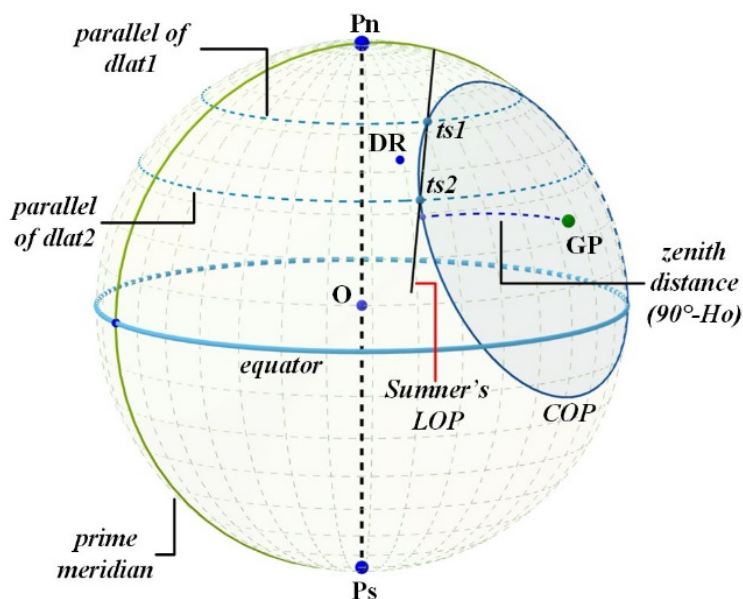


圖 2 薩姆納位置線概念圖

圖 2 中，在推算船位(DR)附近設定兩個假設緯度平行圈(parallels of assumed latitude)。兩緯度平行圈與位置圈(CoP)交於 Sumner 交點(Summer point)ts1 及 ts2。然而，ts1 及 ts2 之經度可透過經線儀求經法(Longitude by Chronometer)求得。通過 ts1 及 ts2 之直線則為 Sumner 位置線(Summer's LOP)。

2-2 馬爾克·聖希萊爾的截距法(Marcq Saint-Hilaire method)

法國海軍少將，馬爾克·聖希萊爾(Marcq Saint-Hilaire)是繼薩姆納船長後，另一位對航海技術貢獻卓著的航海數學家。馬爾克·聖希萊爾擔任法國海軍中校期間於 1873~1875 年間在海洋與殖民評論雜誌(Revue Maritime et Coloniale)上先後發表了兩篇文章[20]，第一篇是 1873 年的「關於點的確定(Note sur la Détermination du Point)」[21]，文中提及觀測高度(observed altitude; Ho)與計算高度(computed altitude; Hc)之間的高度截距(alitude intercept)及天體方位即截距法(IM)為一種新導航(Nouvelle Navigation)的基本概念，並且重申薩姆納船長所發現的等高度圈(circle of equal altitude)；第二篇為「觀測點的計算(Calcul du Point Observé)」[21]，分為兩個部分，第一部分文章中對於截距法(IM)有更進一步的敘述。此方法中的參考位置(reference position)的選擇，使用的是推算(DR)，而不是我們現今所用的假設位置(assumed position; AP)。第二部分則是說明使用截距法(IM)時可能出現的估計誤差。

馬爾克·聖希萊爾(Marcq Saint-Hilaire)在航海數學方面的能力與廣度，無疑是航海數學界的翹楚。他所提出截距法(IM)在航海教科書一直沿用至今已近 150 年，尚未被完全取代。截距法(IM)概念如圖 3。

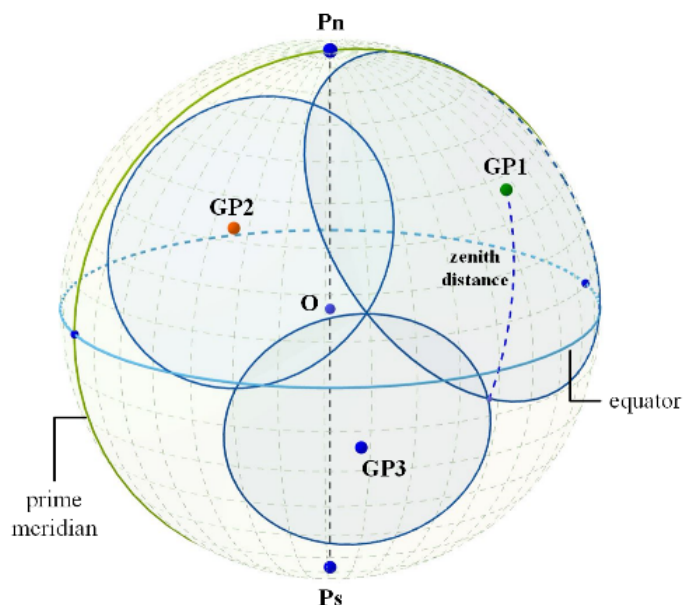


圖 4 小圓交叉定位法概念圖

參、建置天文定位 3 維圖解法

本文使用一種電腦動態幾何代數軟體 GeoGebra，藉由它的 3D 繪圖功能解算天文定位。GeoGebra 亦是一種開源軟體，可供海事院校的學生自由使用。

3.1 地球球面座標系(Spherical coordinate system)與笛卡爾座標系(Cartesian coordinate system)之間的變換

為使計算簡便，假設地球為一個右手正交坐標系 (right-handed orthonormal coordinate)，其原點 O 位於地球球心，固定在地球三個軸的向量集合 $[\mathbf{i}=(1,0,0), \mathbf{j}=(0,1,0), \mathbf{k}=(0,0,1)]$ 構成笛卡爾座標系的標準正交基(Orthonormal basis)，其模長(norm)為單位長度 1，如圖 5，其三軸分別為：

- X 軸：由原點 O 至格林威治子午線與赤道平面的交點；
- Y 軸：由 $\mathbf{j} = \mathbf{i} \times \mathbf{k}$ 得；
- Z 軸：由原點 O 至地理北極點(P_n)。

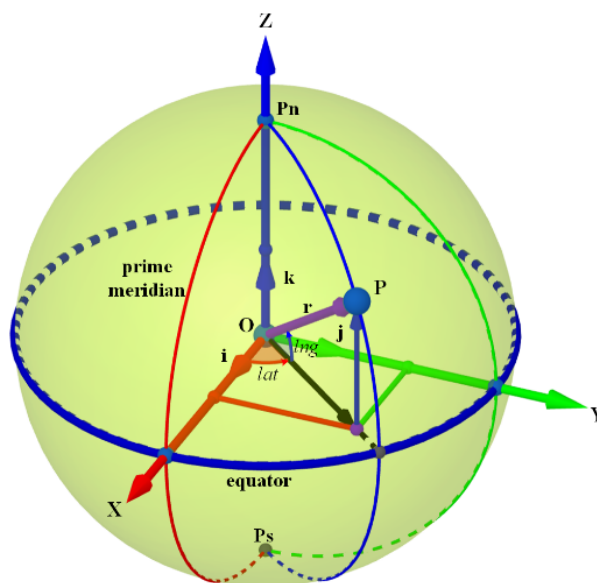


圖 5

若給定天文船位之經、緯度，則由地球球心到任何天文船位 **P** 的之笛卡爾坐標系，由式(1)之線性組合(linear combination)可得：

$$\mathbf{P} = [\cos(lat) \cdot \cos(lng) \cdot \mathbf{i} + \cos(lat) \cdot \sin(lng) \cdot \mathbf{j} + \sin(lat) \cdot \mathbf{k}] \quad (1)$$

其中，經緯度由變數 *lng* 與 *lat* 表示。若為天體地理位置 **GP** 則其笛卡爾坐標系，由式(2)可得：

$$\mathbf{GP} = [\cos(dec) \cdot \cos(gha) \cdot \mathbf{i} - \cos(dec) \cdot \sin(gha) \cdot \mathbf{j} + \sin(dec) \cdot \mathbf{k}] \quad (2)$$

其中，變數 *dec* 與 *gha* 分別為天體赤緯(declination;)與格林威治時角(greenwich hour angle)。相關變數之數值區間如表 1：

表 1 相關變數對照表

中文名稱	英文名稱	變數	區間 (Intervals)
緯度	Latitude	<i>lat</i>	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
經度	Longitude	<i>lng</i>	$[-\pi, \pi]$
赤緯	Declination	<i>dec</i>	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

格林威治 時角	Greenwich Hour Angle	<i>gha</i>	$[0, 2\pi)$
------------	-------------------------	------------	-------------

若給定天文船位 **P** 的之笛卡爾坐標系，則天文船位之經、緯度則由式(3)可得：

$$\begin{cases} lat = \text{atan2}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \\ lng = \text{atan2}(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

3.2 建構天體等高度圈

天體等高度圈(circle of equal altitude; CoP)又稱位置圈(circle of position)，屬於小圓(small circle)的一種。一般來說，在球面上繪出天體等高度圈並不若大圓容易，本文使用動態幾何繪圖軟體(GeoGebra)進行建構天體等高度圈。假設將地球以赤道正射切面投影(equatorial stereographic projection)至平面上，如圖 6。

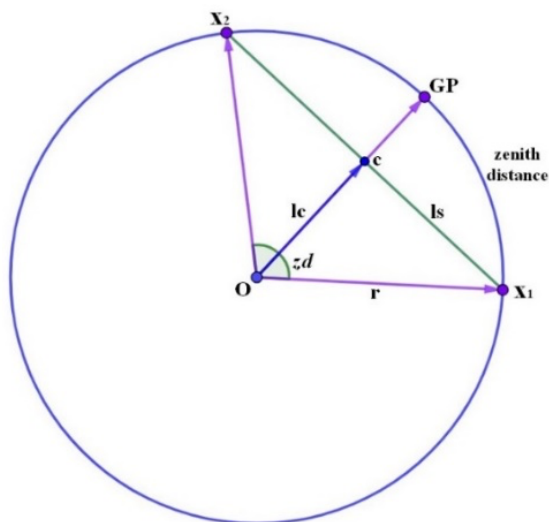


圖 6

在圖 6 中， $\angle zd$ 為天體地理位置(GP)之天頂距(zenith distance)，而 lc 則為：

$$lc = r \cdot \cos(zd) \quad (4a)$$

亦等於 **Oc** 之長度。而天體等高度圈之半徑 ls 則為：

$$ls = r \cdot \sin(zd) \quad (4b)$$

其中， r 為天球之半徑。建構天體等高度圈將以球心至天體之地理位置(GP)之向量為軸，計算出 lc 向量而獲得小圓中心點 c ，再以 ls 為半徑，即可繪出位於球面上之天體等高度圈。

3.3 實例驗證 3 維圖解法

本文採用鮑氏航海學 2019 年版之測天解算(sight reduction)範例進行驗證所提出之 3 維圖解法。

某輪於 1995 年 5 月 16 日 ZT 20-11-26 位於 DR(L 39°N, λ158°W)，以六分儀於 20-07-43 觀測 Kochab，20-11-26 觀測 Spica。觀測資料如表 2 所示，詳細 3 維圖解法過程如下所述[3]：

表 2 例 1 之觀測資料表

	Kochab	Spica
DR	1995/05/16	L 39°N λ158°W
ZT	20-07-43	20-11-26
Declination	74°10.6'N	11°08.4'S
GHA	103°43.0'	126°05.7'
Ho	47°13.6'	32°28.7'

3.3.1 薩姆納位置線法之 3 維圖解法

薩姆納位置線的精神是以尋得天體等高度圈上之割線(secant line)，並以近似(approximation)方式，將此割線視為天文位置線(celestial line of position; LOP)。然而，尋得天體等高度圈上的割線其關鍵在於推算(DR)或估計船位(EP)附近的兩個假設緯度平行圈。此平行圈的設定通常會以緯度差正、負 10 至 20 分為設定基準。以此進行定位時無法用於中天觀測。

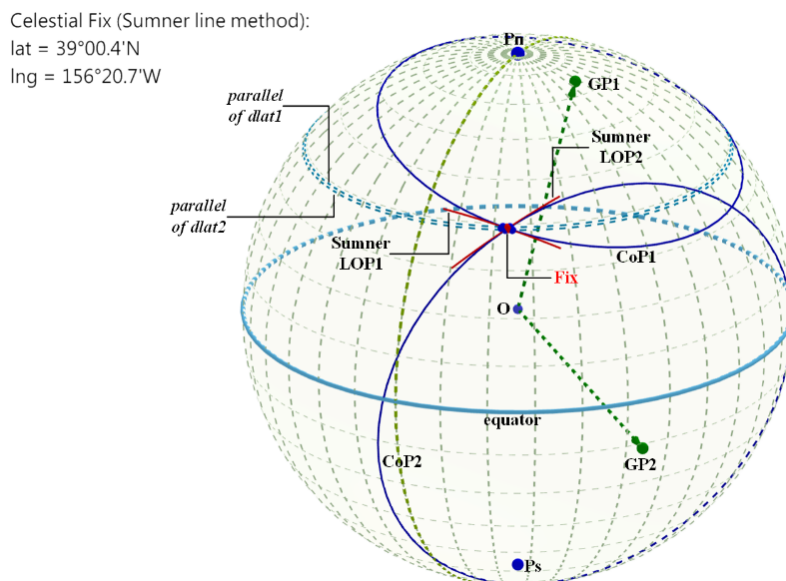


圖 7 薩姆納天文定位 3 維圖解法

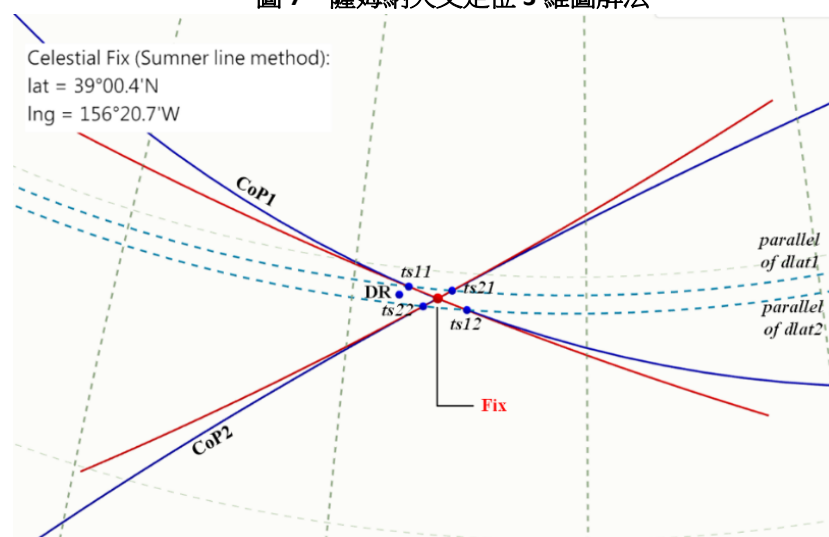


圖 8 薩姆納天文定位局部放大圖

薩姆納位置線定位法之各元素如圖 7，假設推算位置(DR)之緯度差正、負 20 分設定為緯差平行圈(parallel of dlat)。圖 8 則為圖 7 於天文船位附近局部放大圖，可清楚看出兩個薩姆納位置線與各別天體等高度圈之 4 個交點稱為薩姆納點(sumner point; ts)，透過式(3)可得位置分別為 ts11(39°20.0'N, 156°20.7'W)，ts12(38°40.0'N, 155°20.7'W)，ts21(39°20.0'N, 155°45.5'W)，ts22(38°40.0'N, 156°56.7'W)。此 4 個薩姆納點之經度原本需由經線儀求經法(longitude by chronometer)求得，現使用 3 維圖解法僅需設定天體等高度圈與緯差平行圈互為交點即可得。最後設定薩姆納點 ts11 與 ts12 為一組，並連為直線(恆向線)，即可得第一條薩姆納位置線，反之，設定 ts21 與 ts22 為一組，即可得第二條薩姆納位置線，兩位置線之交點即為薩姆納天文定位，其位置為(39°00.4'N, 156°20.7'W)，如圖 7 與圖 8。

3.3.2 馬爾克·聖希萊爾截距法(Marcq Saint-Hilaire method)之 3 維圖解法

薩姆納位置線可稱為割線法的天文位置線，而馬爾克·聖希萊爾的截距法就是切線法的天文位置線。在本圖解法中，本文使用推算位置(DR)為截距法(IM)之參考位置(reference position)，而不是測天解算法所使用的假定位置(assumed position; AP)。原因無他，當年馬爾克·聖希萊爾所提的截距法即是以 DR 為參考位置。在小型計算器還未問世的年代，隨著後世學者的改良，則以航海測天解算表(sight reduction tables for marine navigation)和航海曆(nautical almanac)進行解算。此解算方法受一般航海人員推崇，僅需小學 6 年級的數學程度即可解算[20]，並且一直使用至今。

Celestial Fix (Intercept method):
lat = 38°59.5'N
lng = 156°23.2'W

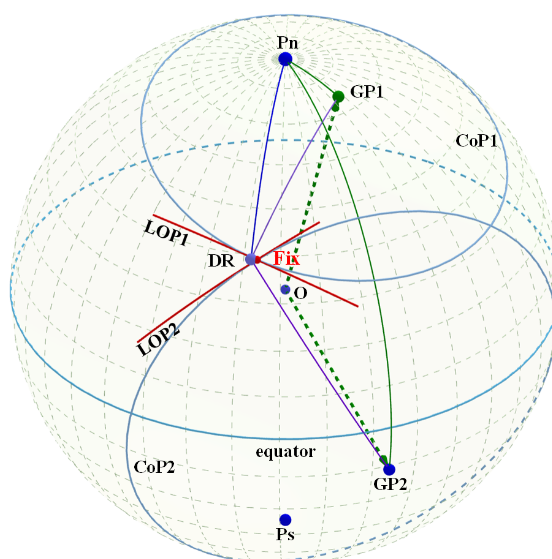


圖 9 馬爾克·聖希萊爾截距法 3 維圖解法

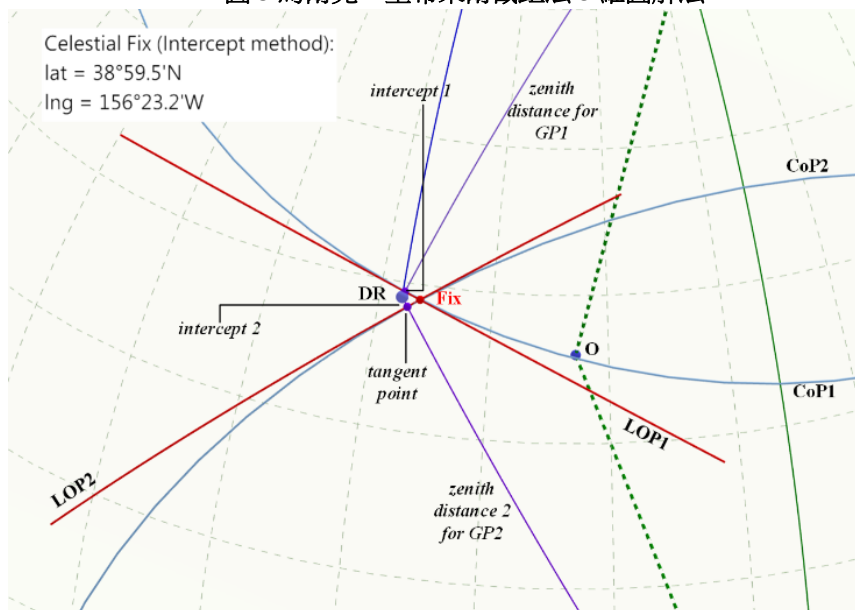


圖 10 馬爾克·聖希萊爾截距法天文定位局部放大圖

本文所提出之 3 維圖解之截距法完全符合傳統截距法。在圖 10 中，我們作推算位置(DR)與天體之天頂距(zenith distance)間與天體等高度圈之交點為天文位置線之切點(tangent point)，並與天頂距垂足繪出天文位置線。兩天文位置線之交點即為天文定位。

3.3.3 小圓交叉定位法之 3 維圖解法

小圓交叉定位法於圖 10 與圖 11 中以相當單純的方式呈現，也就是找出 2 個小圓的 2 個交點，並且透過推算位置(DR)判斷正確的船位。理論上，小圓交叉定位法相較於薩姆納位置線的割線法與截距法的切線法來得準確，前述兩者分別以割線法與切線法來近似天體等高度圈，而小圓交叉定位法則是實際的小圓交點。

SCXSC method:
lat = 38°59.9'N
lng = 156°21.3'W

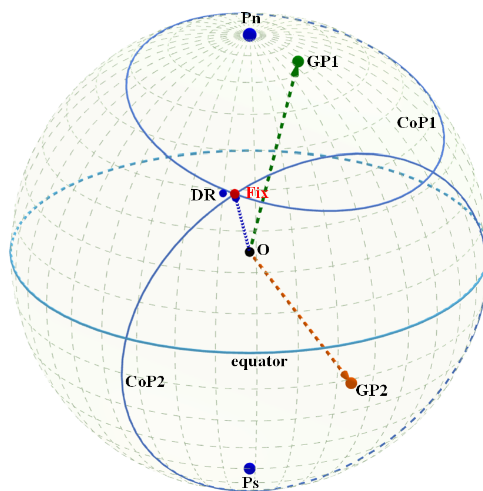


圖 11 小圓交叉定位法之 3 維圖解法

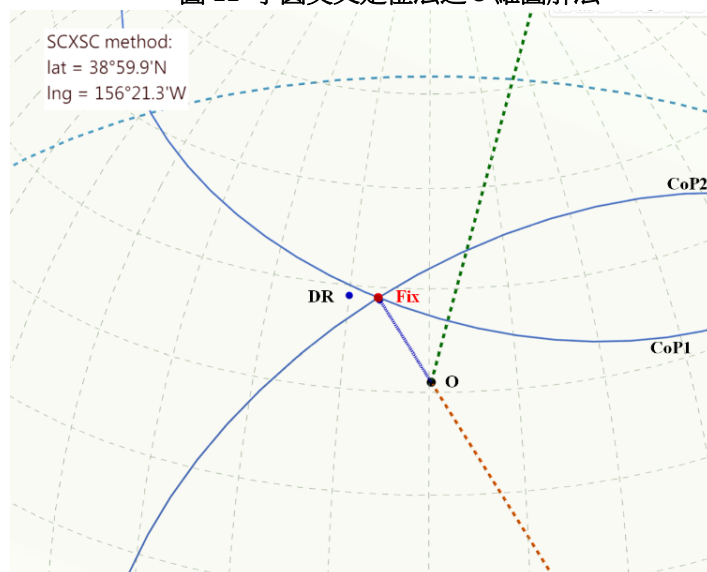


圖 12 小圓交叉定位法局部放大圖

3.3.4 小結

在 3.3 節的實例中，透過三種天文定位的方式，分別得出各別的天文定位。參考相關文獻，如[10, 13]，對照定位結果，如表 3。由於薩姆納位置線法之 3 維圖解法與馬爾克·聖希萊爾截距法之 3 維圖解法均沒有設計迭代(iteration)機制，單純以建構傳統天文定位為主，定位結果與選用參考文獻的天文定位法有少許之落差，但差異不大，完全可以滿足天文定位之要求。而小圓交叉定位法亦沒有設計迭代機制，所得之結果與選用的參考文獻之天文定位法的定位結果相差無幾，顯示出小圓交叉定位法在不需要設計天文定位演算法的前提下，可以獲得相同的定位結果，更是突顯其優勢。

表 3 與其他定位方法之彙整表

Method	Latitude	Longitude
SEEM[10]	39°N	156°21.7'W
MSM[13]	39°N	156°21.7'W
Sumner's 3D graphic method	39°00.4'N	156°20.7'W
Marcq Saint-Hilaire 3D graphic method	38°59.5'N	156°23.2'W
SCXSC 3D graphic method	38°59.9'N	156°21.3'W

肆、實測觀測資料驗證

在實測天文觀測資料部分，由國立海大附中航海科三年級學生三人一組，經任課教師帶領駕駛學生家中的家用動力小船於淡水河口水域以及東北角三貂角燈塔使用船用六分儀進行太陽實測，如圖 13、圖 14。



圖 13 淡水河口實測



圖 14 三貂角燈塔園區實測

實例驗證：

觀測者位於三貂角燈塔 GPS 位置(25°00.5'N, 122°00.1'E)，使用六分儀觀測太陽，眼高 75 公尺，觀測資料如表 4：

表 4 實測天文觀測資料表

	Sun	Sun
ZT	10-14-26	11-29-47
Declination	3°07.9'S	3°09.2'S
GHA	216°09.4'	234°59.9'
Ho	54°50.95'	61°53.4'

結果：

1. 由於使用 Sun-Run-Sun 定位，第二次觀測時，時間近太陽中天。因此薩姆納位置線法於天體近中天時無法進行定位。故捨棄該法，僅採用截距法與小圓交叉定位法。
2. 使用馬爾克·聖希萊爾截距法的 3 維圖解法，如圖 15。所得之截距法天文定位為(24°57.4'N, 122°01.9'E)，如圖 15 及表 4。
3. 使用小圓交叉定位法的 3 維圖解法，如圖 16。所得之天文定位為(24°57.1'N, 122°03.8'E)，如圖 16 及表 4。
4. 截距法與小圓交叉定位法與觀測者實際位置之距離差如表 5。
5. 由學生操作六分儀觀測太陽，由於缺乏經驗，且畢竟站在陸地上向海上觀測，並非實際於船舶上測量，所得的結果雖可滿足天文定位的要求，若實際於海上測量所得的結果尚需檢驗。
6. 兩種定位法所得之天文船位與觀測者位置(位於三貂角燈塔園區內)之相關位置圖以電子地圖服務呈現，如圖 17。

Celestial Fix (Intercept method):
 lat = 24°57.4'N
 lng = 122°01.9'E

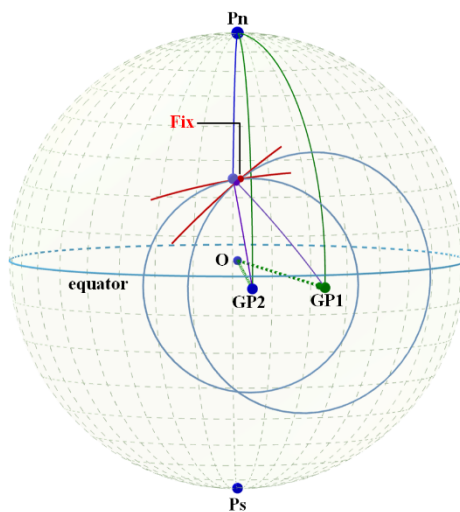


圖 15 截距法 3 維圖解法定位結果

SCXSC method:
 lat = 24°57.1'N
 lng = 122°03.8'E

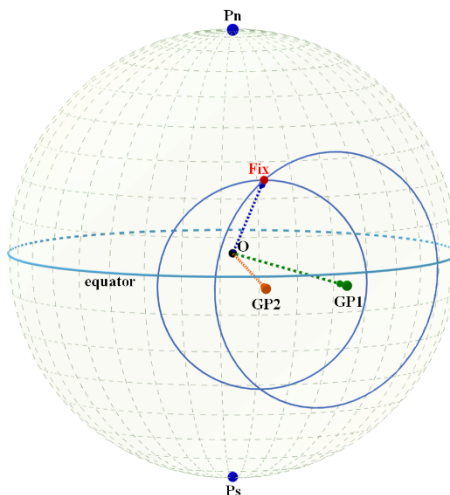


圖 16 小圓交叉定位法 3 維圖解法定位結果

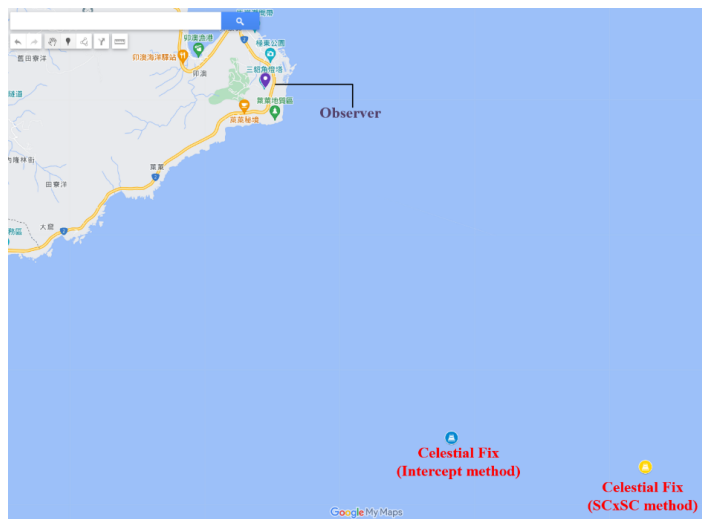


圖 17

表 4 與觀測者實際位置之位置比對表

Method	Latitude	Longitude
GPS(Observer)	25°00.5'N	122°00.1'E
Sumner's 3D graphic method	-	-
Marcq Saint-Hilaire 3D graphic method	24°57.4'N	122°01.9'E
SCXSC 3D graphic method	24°57.1'N	122°03.8'E

表 5 位置距差表

Method	difference
GPS	-
Sumner's 3D graphic method	-
Marcq Saint-Hilaire 3D graphic method	3.5'
SCXSC 3D graphic method	4.8'

伍、結論

我國海事教育中，天文航海的教學內容偏重於使用舊年份的航海曆所設計的情境題目，由交通部航海人員測驗的考畢試題題庫中即可知。久而久之，對於現代的學生容易產生時空的隔離感。另外，僅僅使用航海曆、航海測天解算表，反覆手工查表解算，無法真正引起學生的學習興趣與研究動機。學生學習天文航海主要是以通過航海人員測驗為目標，並無深入探討及研究天文航海的慾望，對於未來的海事教育並沒有產生助益。反觀國外，不僅將天文學的教學融入中學教育中，同時透過水上活動、遊艇駕駛等，將天文航海使用六分儀測量天體融入其中，從做中學，相關內容可由 YouTube 搜尋可知。為此，本文透過電腦 3 維圖解法建構傳統的天文定位法，如薩姆納位置線法、截距法。若使用電腦帶領學生製作，可使學生更進一步了解其定位原理。並且結合學生實際觀測之天文資料，使學生在學習天文航海的過程中，能夠真實的體會到天文定位的過程與定位的結果，大大提升學生學習成效與樂趣。

參考文獻

- [1] contributors W. John Napier: In Wikipedia; 2022, October [Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier].
- [2] Bowditch N. The American practical navigator: an epitome of navigation/vol. 11984.
- [3] Bowditch N. American Practical Navigator. 2019 ed, National Geospatial-Intelligence Agency, Springfield; 2019. 239-40.
- [4] Chou HP. Geo Navigation, Maritime Research Center Nation Taiwan Ocean University, Taiwan.(In Chinese); 1999.
- [5] Chou HP. Celestial Navigation, Maritime Research Center Nation Taiwan Ocean University, Taiwan.(In Chinese); 1999.
- [6] Cutler TJ. Dutton's Nautical Navigation, Naval Institute Press Annapolis; 2004.
- [7] Sa SH. Navigation, Volume 2. 3 ed, Wensheng Book Store; 1990.
- [8] Sa SH. Navigation, Volume 1. 3 ed, Wensheng Book Store; 1990.
- [9] Chen C-L, Hsieh T-H. Computation programs of the astronomical vessel position. J Mar Sci Technol. 2011;19(1):5.
- [10] Chen C-L, Hsu T-P, Chang J-R. A novel approach to determine the astronomical vessel position. J Mar Sci Technol. 2003;11(4):6.
- [11] Chen C-L, Hsu T-P, Weng G-Y. New computational approaches to determining the astronomical vessel position based on the Sumner line. Pol Marit Res. 2014;21(4 (84)):3-11.
- [12] Hsu T-P, Chen C-L, Chang J-R. New computational methods for solving problems of the astronomical vessel position. J Navig. 2005;58(2):315-35.
- [13] Hsu T-P, Weng G-Y, Chen C-L. A modified Sumner method for obtaining the astronomical vessel position. J Mar Sci Technol. 2017;25(3):8.
- [14] Tsou M-C. Genetic algorithm for solving celestial navigation fix problems. Pol Marit Res. 2012;19(3 (74)):53-9.
- [15] Tsou M-C. Celestial navigation fix based on particle swarm optimization. Pol Marit Res. 2015.
- [16] Tsai K-C, Tseng W-K, Chen C-L, Sun Y-J. A Novel Analytical Solution Method for Celestial Positioning. J Mar Sci Eng. 2022;10(6):771.
- [17] Bensky T. Numerical Adaptations of Captain Sumner's 1837 journey: a context for teaching celestial navigation. J Navig. 2022:1-11.

- [18] Hsu T-P, Chen C-L, Hsieh T-H. A graphical method for great circle routes. *Pol Marit Res*. 2017.
- [19] Navigation C. 6 Methods For Celestial Navigation: Simplifying Maritime Education; 2022 [Available from: <https://casualnavigation.com/6-methods-for-celestial-navigation/>].
- [20] contributors W. True-range multilateration 2022, September 24 [Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/True-range_multilateration].
- [21] Vanvaerenbergh M, Ifland P. Line of position navigation: Sumner and Saint-Hilaire, the two pillars of modern celestial navigation, Unlimited Publishing LLC; 2003.