

慣用的大圈航法之程式開發^{*}

The Developed Program of Conventional Great Circle

Sailings

陳志立^{*}、陳怡君^{**}、江伊嵐^{***}

摘要

大圈弧線是地球表面上任意兩點間之最短距離，因此，在航程計畫中大洋航行時，求解大圈航法的問題，即大圈航路上各轉向點位置之計算，係為最重要的工作。然而該慣用的計算程序，其不僅是繁瑣的過程而且計算時需要很多人工判斷；又目前現有的大圈航法之計算程式尚無類似者，此引發了本文的研究動機。本文提出整合式計算程序，其以大圈方程式法為基本，再配合直角球三的納皮爾法則等相關公式建構，其內含有係使用「夾擊定理」概念所創造的判別式；並進而採用 MATLAB[®]內建的圖形使用者介面，開發出具人性化且慣用的大圈航法之計算程式，且命名為 GCS_Vertex。該自行開發之程式均透過實例確認其正確性。

關鍵詞：大圈航法、大圈方程式法、納皮爾法則

Abstract

^{*} 本文為行政院國家科學委員會專題研究計畫(編號: NSC 96-2628-E-019-022-MY3)之部份研究成果，承蒙經費補助特此致謝。

^{*} 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系副教授兼系主任，國立臺灣大學工學博士。Email: clchen@mail.ntou.edu.tw

^{**} 陳怡君 Yi-Chun Chen，國立臺灣海洋大學商船學系碩士。

^{***} 江伊嵐 Yi-Lan Chiang，國立臺灣海洋大學商船學系碩士班研究生。

The great circle arc is the shortest distance between two arbitrary points on the earth's surface. To solve the problem of the great circle sailings (GCS), finding the waypoints along the great circle track is the most important task in open sea sailings of voyage plan; however, this conventional computation procedure is not only the tedious process but also many artificial judgments needed in calculation. In addition, no similar GCS computational programs are found currently. It leads to the motivation of this paper. Based on great circle equation method (GCEM) in conjunction with Napier's rules of right-angled triangles, including determinant formulae from "sandwich theorem" concept, the integral computation procedures are proposed and then, the Graphical User Interface (GUI) built in the MATLAB[®] is adopted to develop friendly conventional GCS program, namely the GCS_Vertex. This self-developed program is validated with several examples presented in available books.

Keywords: Great circle sailings (GCS), Great circle equation method (GCEM), Napier's rules.

壹、緒論

船舶在每一航次之前，均必須擬定航程計畫(voyage plan)^[1-6]，該計畫概分為評估和計算等兩大階段。以大洋航行為例，評估階段之目標為安全及節能，其係參考當月份導航圖(pilot charts)裡風及流的情況，並參考未來的氣象預測圖等，思考採用幾段大圈航路(great circle track)或混合航路(composite track)，其重點在於主要轉向點(main waypoints)的選擇；而計算階段之目標則是最短距離，其重點則在於航法之計算，即求得航路上各轉向點及其間各段麥氏航路(Mercator track)的航向和距離等的結果資訊。最後，將該等資訊移轉於麥氏海圖(Mercator chart)上或人工輸入電子海圖顯示資訊系統(electronic chart display and information system, ECDIS)，經檢核確認後，即可執行航程計畫。該計畫除上述風、流及氣候等外在環境因素外，尚須考量船舶本身的條件，如船舶限制(vessel limitations)、燃料及飲用水消耗(fuel and drinking water consumption)和緊急(urgency)事故應變作業等；此亦為駕駛台資源管理(bridge resource management, BRM)的內容。

大圈弧線(great circle arc)是地球表面上任意兩點間最短距離^[7,8]。然欲使船舶專注於改變航向以確保航行在大圈航路上，是件不可能的事，因此，在實務上，係採用一組恆向線(rhumb lines)來逼近大圈航路。簡言之，大圈航法(great circle sailings, GCS)的主要問題，係在計算大圈航路上各轉向點位置及其間麥氏航路的航向和距離；即在實務上大圈航法係為分段的麥氏航法(Mercator sailings, MS)^[9]。

大圈航法問題之求解方法概分為三：量度法、查表法和計算法；量度法係在大圈海圖(great circle chart)或球心切面投影圖(gnomonic projection)等直接量取；查表法則使用測天解算表(sight reduction tables)或簡算表冊(short method tables)等求解，而計算法乃是應用球面三角學的公式去計算出各轉向點位置。學理上，計算法所求得的大圈航路資訊相當精確；又由於先進的計算科技，使得程式開發更有其可行性及急迫性。更有鑑於求解大圈航法問題之慣用的計算程序根深蒂固，即以頂點為基準，且其初始條件則有定值經度差或大圈距離等，此引發了欲撰寫慣用的大圈航法之程式的最初動機。

為認知現有的大圈航法之計算程式，以航法計算器(sailing calculator)作為關鍵詞搜尋之，可得到不少的網頁，以可靠的美國軍方國家地理空間智慧局(National Geospatial-intelligence Agency, NGA)網站內海事安全資訊(maritime safety information)的互動式網頁(interactive webpage)^[10]為例說明，其大圈航法之計算程式，僅有給經度求緯度的計算情境，欠缺完整性；至於大圈航法的商業程式，如巴西 Navigator^[11]和英國 NavPac^[12]等，皆不是以頂點為基準，此更增強了本研究欲開發慣用的大圈航法之程式的強烈動機。

為讓使用者對大圈弧線有更深入的了解以及具有易操作的效果，進而思考並設計人性化面版；亦即考量輸入偵錯和計算情境以及輸出結果分析等兩項功能。因此，本研究採用 MATLAB[®]^[13-15]程式語言作為開發工具，係其不僅屬於直譯式語言，能直接編寫、執行及偵錯(debugger)且能提供與大圈航法相關之計算公式中，有關角度與徑度間轉換、三角及反三角函數的預設函式庫。另外，更重要的是其內建的互動式使用者圖形介面(Graphical User Interface, GUI)，可設計出讓使用者直覺且簡單的操作面板。

本文除本章緒論外，後續章節安排如下：第二章就與大圈航法之各計算程序等進行文獻回顧，繼而在第三章提出整合式計算程序，其係以大圈方程式法(great circle equation method, GCEM)計算求得大圈弧線之基本資訊，再配合直角球三的納皮爾法則(Napier's rules)等相關公式建構之；其中有些是本文使用「夾擊定理(sandwich theorem)」概念所創造的判別式，並進而採用 MATLAB[®]程式語言內建的圖形使用者介面，開發出具有人性化且慣用的大圈航法之程式，繼而在第四章透過實例確認本文所自行開發的程式，最後於第五章提出結論。

貳、文獻回顧

直至今日，目前國內外的「航海學」教材^[1-6]在求解大圈航法問題仍舊喜好採用慣用的計算程序，其整體構想在於巧妙地應用大圈弧線上頂點位置處的球面幾何性質，即大圈弧線與子午線相交為直角。而有了這個直角特性，頂點、近極點及大圈航路上各轉向點即可形成多數個直角球三。據此，便可靈活地應用直角球三的納皮爾法則之相關公

式，輕易地求得各轉向點位置。簡言之，該計算程序，係以頂點為參考基準點，再據此求得大圈航路上各轉向點位置，準此，該法被稱為「參考頂點之計算程序(computation procedure with reference to the vertex)」。而正確的頂點位置即為該計算程序的關鍵，然頂點位置則需要人工判斷，一般係依據大圈初航向與經度差之方向等判別。

陳志立等人首先發現各相關論著對慣用的計算程序中，每一步驟之求解公式有不一致的現象^[1-6]，進而提出「最小誤差傳播」和「簡單性」等兩項評估準則，建立最佳化慣用的計算程序，以釐清航海者在求解計算過程中莫衷一是的困惑^[9,16,17]。

如圖 1 所示，最佳化慣用的計算程序之求解步驟及建議公式彙整如下：

- 步驟 1：** 計算大圈距離和大圈初航向角；分別採用邊餘弦及四鄰公式求解。
- 步驟 2：** 以啓航點緯度和大圈初航向角；分別使用納皮爾法則 1 及法則 2 計算頂點緯度及經度。
- 步驟 3：** 轉向點位置。
- 情境 1.** 給定各轉向點經度，透過頂點經度換算，得到頂點至各轉向點之經度差，再配合頂點緯度；應用納皮爾法則 2 計算各轉向點緯度。
- 情境 2.** 給定頂點到各轉向點的大圈距離，再配合頂點緯度；使用納皮爾法則 1 及法則 2 分別求得大圈航路上各轉向點之緯度及經度。
- 步驟 4：** 各轉向點間均採用麥氏航法分別計算各轉向點間(各段)的航向和距離。

學理上，張建仁等人^[18]認為，大圈弧線上過赤道點的決定比頂點來得容易，並應用極對偶定理(polar duality theorem, PDT)，將多數個直角球三均轉變為象限球三，進而建立大圈航法之新計算程序或稱為「參考過赤道點之計算程序(computation procedure with reference to the equator crossing point)」，如圖 2 所示。

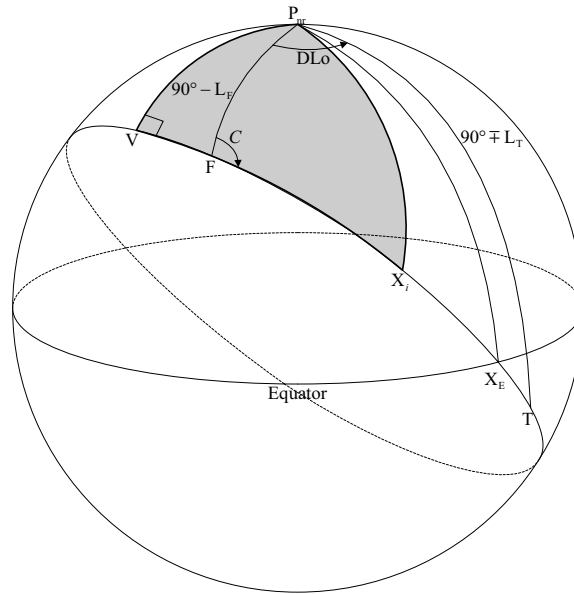


圖 1 慣用的大圈航法之計算程序(參考頂點)示意圖

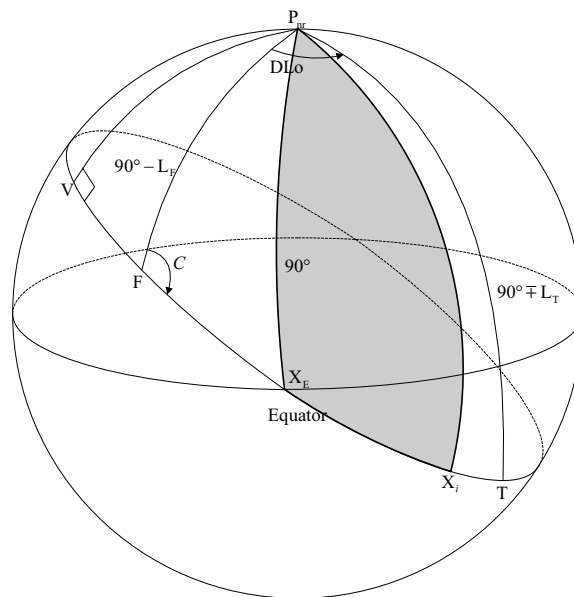


圖 2 大圈航法之新計算程序(參考過赤道點)示意圖

事實上，陳志立等人^[9,16,17]以為，不論是參考頂點或參考過赤道點之計算程序，在本質上均屬於間接的計算法；故回到問題源頭並思考之，使用固定座標系統和相對子午線觀念的兩技巧，配合向量代數，簡化且直接地建構出大圈方程式。

如圖 3 所示，三點皆在大圈弧線上，其中 $(\vec{F} \times \vec{T})$ 為參數向量，而 \vec{X} 為變數向量，三向量共面，其三重積為零，即

$\vec{X} \cdot (\vec{F} \times \vec{T}) = 0$ 。整理後，其示意公式如下：

$$F(\text{轉向點緯度, 啓航點至轉向點之經度差}) = F(L_X, DLo_{FX}) = 0$$

該創新的計算方法，即是大圈方程式法(GCEM)或稱「參考啓航點之新計算方法(a novel approach with reference to the departure point)」；此法對求解大圈航路上的任何一點如頂點、過赤道點及各轉向點等，均可直接且不需人工判斷而準確地計算求得。下述為該方法之計算重點說明：

重點 1： 各轉向點位置。

情境 1. 給定各轉向點經度，透過啓航點經度，可得到啓航點至各轉向點之經度差，代入大圈方程式即可求得各轉向點緯度。

情境 2. 給定各轉向點緯度，代入大圈方程式即求得各轉向點經度差，再根據啓航點經度，可換算得到各轉向點經度。

重點 2： 頂點位置；對大圈方程式之緯度作微分，並令一階導數為零，求解即得。

重點 3： 過赤道點位置；令 $L_E = 0$ ，代入大圈方程式即可求得 λ_E 。

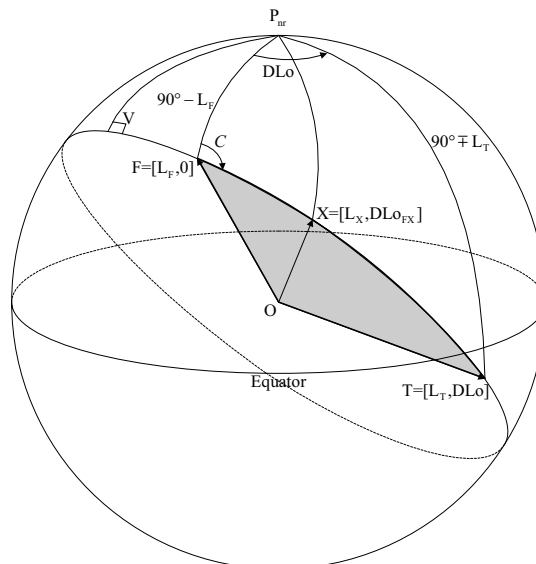


圖 3 大圈方程式法(參考啓航點)示意圖

表 1 大圈航法之各種計算方法之比較表

計算方法	參考基準	計算情境	各點位置計算*
------	------	------	---------

慣用的計算程序	頂點	<ul style="list-style-type: none"> ● 給經度求緯度 ● 給大圈距離求經緯度 	需人工判斷
新計算程序	過赤道點	<ul style="list-style-type: none"> ● 給經度求緯度 ● 給大圈距離求經緯度 	需人工判斷
大圈方程式法	啓航點	<ul style="list-style-type: none"> ● 給經度求緯度 ● 給緯度求經度 	直接計算可得

*：各點係指頂點、過赤道點及各轉向點。

彙整前述之計算方法製表，如表 1 示。欲開發慣用的大圈航法之程式，關鍵在於頂點之決定，而大圈方程式法可直接計算求得頂點，基此，以其為根本，先求得大圈弧線之基本資訊如大圈距離、大圈初航向、兩頂點及兩過赤道點等；再採用慣用的計算程序，依其兩種計算情境分別計算大圈航路上各轉向點位置；最後使用麥氏航法計算各轉向點間的麥氏航向和麥氏距離。

參、程式之計算流程

流程計有四步驟。步驟 1 以大圈方程式法為主，計算大圈弧線之基本資訊；步驟 2 判定頂點位置，分兩階段判別之，階段 1 在大圈航路上之頂點為參考基準點，階段 2 若頂點不在航路上則選擇與經度差反向之頂點為基準點；步驟 3 則分兩情境計算大圈航路上各轉向點位置，情境 1「給定經度求緯度」再分為頂點在航路上及不在航路上等兩種情況；同樣地，情境 2「給定大圈距離求經緯度」亦有該兩種情況；分別求得各轉向點之後，在步驟 4 即可採用麥氏航法計算其間之麥氏航向及其距離。

程式中係以正負值表示各點位置及其間之方向性；因此，規定北緯與東經為正值，而南緯與西經採負值，同樣地，經度差與緯度差則以向東及向北為正，向西及向南為負。另為了便於說明，則將所有變數之定義彙整於本文後的附錄。

步驟 1：計算大圈弧線之基本資訊

1. 大圈距離(Dg)：以球三邊餘弦公式計算之，

$$\cos Dg = \sin L_F \cdot \sin L_T + \cos L_F \cdot \cos L_T \cdot \cos DLo \quad (1)$$

2. 大圈初航向角(C)：

$$\cos C = \frac{\sin L_T - \sin L_F \cdot \cos Dg}{\cos L_F \cdot \sin Dg} \quad (2)$$

文獻^[9,16,17,19]建議，在考量「最小誤差傳播」評估準則下，宜採用四鄰公式，然 \arctan 之值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，對於而後航向角(C)轉換為航向(Cn)時較為繁瑣；而基於 \arccos 之值域為 $[0, \pi]$ ，故本研究則使用球三邊餘弦變形公式求解之；然使用此式時，應注意數值之正負號，與啓航點緯度同名為正，反之，異名為負^[9,17]。

- 航向角(C)轉為航向(Cn)之判別式：

$$Cn = \begin{cases} C & , L_F > 0 , DLo > 0 \\ 360^\circ - C & , L_F > 0 , DLo < 0 \\ 180^\circ - C & , L_F < 0 , DLo > 0 \\ 180^\circ + C & , L_F < 0 , DLo < 0 \end{cases} \quad (3)$$

3. 頂點位置(L_V, λ_V)：

$$\tan DLo_{FV_1} = \frac{b}{a} \quad (4a)$$

$$\tan L_{V_1} = \frac{a \cdot \cos DLo_{FV_1} + b \cdot \sin DLo_{FV_1}}{-c} \quad (4b)$$

上兩式中的 a 、 b 、 c 為大圈方程式之參數，其計算式^[9,16,17]如下述：

$$\begin{cases} a = -\sin L_F \cdot \cos L_T \cdot \sin DLo \\ b = \sin L_F \cdot \cos L_T \cdot \cos DLo - \cos L_F \cdot \sin L_T \\ c = \cos L_F \cdot \cos L_T \cdot \sin DLo \end{cases} \quad (5)$$

\arctan 的值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，故以式(4a)及(4b)所計算得到的頂點(V_1)係與啓航點(F)

較近者，且 L_{V_1} 與 L_F 同名；而另一頂點(V_2)則可透過 $DLo_{V_1V_2} = 180^\circ$ 求得 λ_{V_2} ，且 L_{V_2} 與 F 異名。

4. 過赤道點位置($0, \lambda_E$)：

$$\tan DLo_{FE_1} = -\frac{a}{b} \quad (6)$$

同理，由於 \arctan 的值域，故過赤道點(E_1)係為與啓航點(F)較近者，而另一過赤道點(E_2)則可透過 $DLo_{E_1E_2} = 180^\circ$ 求得 λ_{E_2} 。

步驟 2：決定參考基準點，即判定頂點位置

首先將「夾擊定理(sandwich theorem)」概念導入「方向性」來判定頂點與大圈航路彼此間之關係如下：

$$\begin{cases} V_1 \text{ 在大圈航路上} & , DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_1T} > 0 ; & (7a) \\ V_1 \text{ 不在大圈航路上} & , DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_1T} < 0 ; & (7b) \\ V_2 \text{ 在大圈航路上} & , DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_2T} < 0 ; & (7c) \\ V_2 \text{ 不在大圈航路上} & , DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_2T} > 0 。 & (7d) \end{cases}$$

階段 1：頂點在大圈航路上

此情況之 V ，其包含 V_1 及 V_2 ，即式(7a)及(7c)；

階段 2：若頂點不在航路上，則選擇與經度差反向之頂點

該情況，即式(7b)及(7d)，而其判別式如下：

$$\begin{cases} V = V_1 & , DLo * DLo_{FV_1} < 0 ; \\ V = V_2 & , DLo * DLo_{FV_1} > 0 。 \end{cases} \quad (8)$$

步驟 3：各轉向點位置

概分為兩情境，再分別細分為頂點在航路上及不在航路上等兩種情況，前者因各轉向點係在頂點之兩側，故需分為兩部分分別計算之，而後者則否。

情境 1：「給定經度求緯度」

1. 頂點在大圈航路上：

初始條件為「定值經度差(DLo_{XX})」，必須先求得「預備變數(DLo_{vX_i})」；

$$DLo_{vX_i} = DLo_{XX} * i \quad (9)$$

再透過納皮爾法則 2，如下式可求得各轉向點緯度(L_{X_i})；

$$\tan L_{X_i} = \cos DLo_{vX_i} \cdot \tan L_v \quad (10)$$

至於在頂點兩側之各轉向點經度(λ_{X_i})，其兩部分之計算式，分述如下：

(1) 當轉向點在啓航點與頂點之間時，以下式計算：

$$\lambda_{X_i} = \begin{cases} \lambda_v - DLo_{vX_i} & , DLo > 0 \text{ (往東)} \\ \lambda_v + DLo_{vX_i} & , DLo < 0 \text{ (往西)} \end{cases} \quad (11a)$$

(2) 當轉向點在頂點與到達點之間時，則採用下式：

$$\lambda_{X_i} = \begin{cases} \lambda_v + DLo_{vX_i} & , DLo > 0 \text{ (往東)} \\ \lambda_v - DLo_{vX_i} & , DLo < 0 \text{ (往西)} \end{cases} \quad (11b)$$

2. 頂點不在大圈航路上：

當頂點不在大圈航路上時，需考量啓航點至頂點之經度差與初始條件之關係，以求得「預備變數(DLo_{vX_i})」，其計算式：

$$\begin{cases} n_{FV} = \left[\frac{DLo_{FV}}{DLo_{XX}} \right] \\ DLo_{vX_i} = (n_{FV} + i) * DLo_{XX} \end{cases} \quad (12)$$

之後則可分別以式(10)及(11b)，求得各轉向點緯度及經度。

情境 2：「給定大圈距離求經緯度」

1. 頂點在大圈航路上：

初始條件則為「定值大圈距離(D_{XX})」，必須先經下式求得「預備變數(D_{vX_i})」；

$$D_{vX_i} = D_{XX} * i \quad (13)$$

再以直角球三的納皮爾法則分別計算：

$$\sin L_{X_i} = \sin L_V \cdot \cos D_{vX_i} \quad (14a)$$

$$\tan DLo_{vX_i} = \tan D_{vX_i} \cdot \sec L_V \quad (14b)$$

式(14a)可求得各轉向點緯度(L_{X_i})；而式(14b)所求得 DLo_{vX_i} ，因該變數恆為正值，據此，

在頂點兩側之各轉向點經度(λ_{X_i})，分別以下述兩部分公式計算：

(1) 當轉向點在啓航點與頂點之間時，以下式計算：

$$\lambda_{X_i} = \begin{cases} \lambda_V - DLo_{vX_i} & , DLo > 0 \text{ (往東)}, L_V * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_V - DLo_{vX_i} + 180^\circ & , DLo > 0 \text{ (往東)}, L_V * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \\ \lambda_V + DLo_{vX_i} & , DLo < 0 \text{ (往西)}, L_V * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_V + DLo_{vX_i} + 180^\circ & , DLo < 0 \text{ (往西)}, L_V * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \end{cases} \quad (15a)$$

(2) 當轉向點在頂點與到達點之間時，則以下式計算：

$$\lambda_{X_i} = \begin{cases} \lambda_v + DLo_{vX_i} & , DLo > 0 \text{ (往東)}, L_v * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_v + DLo_{vX_i} + 180^\circ & , DLo > 0 \text{ (往東)}, L_v * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \\ \lambda_v - DLo_{vX_i} & , DLo < 0 \text{ (往西)}, L_v * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_v - DLo_{vX_i} + 180^\circ & , DLo < 0 \text{ (往西)}, L_v * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \end{cases} \quad (15b)$$

2. 頂點不在大圈航路上：

當頂點不在大圈航路上時，需考量啓航點至頂點之大圈距離與初始條件之關係，以求得「預備變數(D_{vX_i})」，其計算式：

$$\begin{cases} n_{FV} = \left[\frac{D_{FV}}{D_{XX}} \right] \\ D_{vX_i} = (n_{FV} + i) * D_{XX} \end{cases} \quad (16)$$

之後以式(14a)求得各轉向點緯度，而以(14b)及(15b)，求得各轉向點經度。

步驟 4：計算各轉向點間的麥氏航向及其距離

麥氏海圖為保角變換而創造的緯度漸長比數，其原型公式^[20]如下：

$$M = a_e \cdot \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{L}{2} \right) \times \left(\frac{1 - e \cdot \sin L}{1 + e \cdot \sin L} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (17)$$

由於目前無論是電子海圖顯示資訊系統(ECDIS)及全球定位系統(Global Positioning System, GPS)均使用 WGS-84，準此，本文亦採用其參數值： $a_e = 3437.74677078$ 為赤道 1 分弧所表示的數值；而 $e = 0.8181919$ 為地球偏心率^[21]。

1. 麥氏航向角(Cm)：

首先計算各轉向點間的緯度差(ℓ)、經度差(dlo)及其緯度漸長比數差(m)：

$$\begin{cases} \ell = L_{X_{i+1}} - L_{X_i} \\ dlo = \lambda_{X_{i+1}} - \lambda_{X_i} \\ m = M_{X_{i+1}} - M_{X_i} \end{cases} \quad (18)$$

至此，麥氏航向角即可依下式求得，

$$\tan Cm = \frac{dlo * 60'}{m} \quad (19)$$

- 麥氏航向角(Cm)轉換為麥氏航向(Cmn)之判別式：

$$Cmn = \begin{cases} Cm & , \ell > 0 , dlo > 0 \\ 360^\circ - Cm & , \ell > 0 , dlo < 0 \\ 180^\circ - Cm & , \ell < 0 , dlo > 0 \\ 180^\circ + Cm & , \ell < 0 , dlo < 0 \end{cases} \quad (20)$$

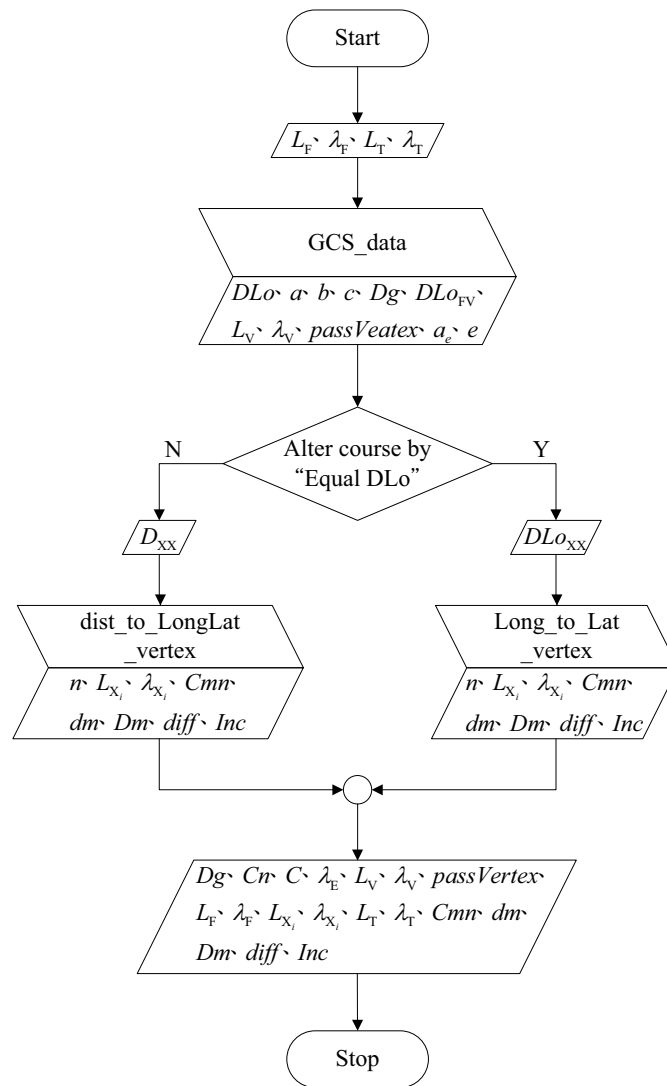


圖 4 GCS_Vertex 程式之計算流程圖

2. 麥氏距離(dm) :

$$dm = \begin{cases} \ell \cdot \sec Cm & , Cm \neq 90^\circ \\ dlo \cdot \cos L_{X_i} & , Cm = 90^\circ \end{cases} \quad (21)$$

式中，當麥氏航向角為 90° 時，則採用平行航法。

綜合上述，本文所開發慣用的大圈航法之程式，其計算流程圖如圖 4 示；並命名為 GCS_Vertex 程式。

肆、實例確認與分析

在實例確認時，因查表法計算結果定不如計算法精確，僅供參考；而 Navigator 與 NavPac 皆不是以頂點為基準，亦不適用；而 NGA 的大圈航法僅有「給經求緯」之程式，因此，只好採用「逐一檢驗法」，亦即將執行 GCS_Vertex 程式後所得的全部計算結果，係各點位置皆透過該程式檢驗之；此外，再使用 NGA 的麥氏航法之程式，一一比對各轉向點間的麥氏航向及其距離。

例題 1：某船由南非的 Port Elizabeth(L 34°02.0'S, λ 25°30.0'E)，以大圈航法航行至印度南端的 Laccadive Sea(L 8°09.0'N, λ 78°06.0'E)^[1]。

[欲求]

1. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及初航向、頂點及過赤道點位置；
2. 以頂點為基準，每隔經度差10°，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離。

[計算] 執行 GCS_Vertex 程式。

[結果與說明]

1. 操作結果如圖 5 示，其計算結果資訊彙整於表 2。
2. 大圈弧線之基本資訊
 - (1) 大圈距離及其初航向：本文的 GCS_Vertex 程式、查表法及 NGA 的大圈航法之程式，三者計算結果完全相同；

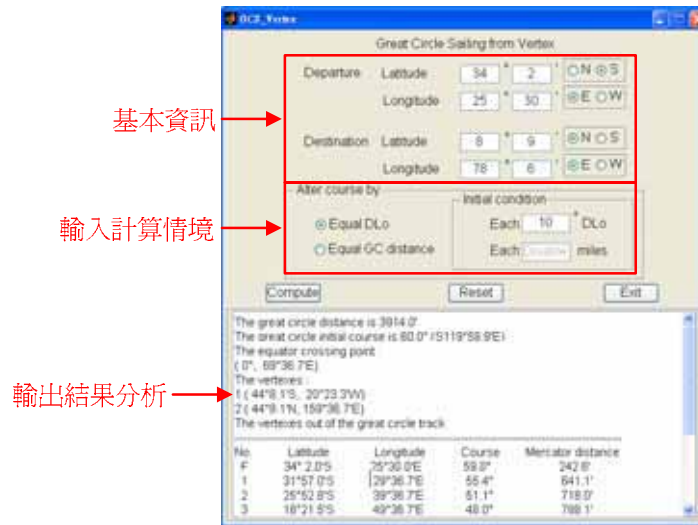


圖 5 GCS_Vertex 程式操作結果(例題 1)

表 2 GCS_Vertex 程式計算結果 (例題 1)

The great circle distance is 3914.0'				
The great circle initial course is 60.0° (S119°59.9'E)				
The equator crossing point :				
(0°, 69°36.7'E)				
The vertexes :				
1.(44°8.1'S, 20°23.3'W)				
2.(44°8.1'N, 159°36.7'E)				
The vertexes out of the great circle track				
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	34° 2.0'S	25°30.0'E	59.0°	242.6'
1	31°57.0'S	29°36.7'E	55.4°	641.1'
2	25°52.8'S	39°36.7'E	51.1°	718.0'
3	18°21.5'S	49°36.7'E	48.0°	788.1'
4	9°33.8'S	59°36.7'E	46.3°	831.1'
5	0° 0.0'	69°36.7'E	46.3°	707.2'
T	8° 9.0'N	78° 6.0'E		
The total Mercator distance is 3928.1'				
The difference between great circle and Mercator distance is 14.0'				
Increasing rate is 0.36%				

- (2) 頂點位置：NGA 的大圈航法之程式無法計算；然使用該程式依「逐一檢驗法」檢驗本文的 GCS_Vertex 程式所計算的兩頂點位置，結果確認相同；
- (3) 過赤道點位置：同上，本文的 GCS_Vertex 程式所計算結果，以 NGA 的大圈航法之程式採用「逐一檢驗法」，發現兩者結果均相同。
3. 判定頂點位置：NGA 的大圈航法之程式無法判定；然執行本文的 GCS_Vertex 程式發現，此例題結果為兩頂點皆不在大圈航路上。

4. 各轉向點位置及其間的麥氏航向與麥氏距離

- (1) 各轉向點位置：採「逐一檢驗法」，發現兩者結果均相同；
- (2) 麥氏航向與麥氏距離：執行 GCS_Vertex 程式所得的各轉向點，以 NGA 的麥氏航法之程式，逐一代入計算，並相互比較，發現兩者結果相同。此外，此例題之輸出結果分析，顯示共有 5 個轉向點，且其麥氏距離總值較大圈距離理論值增加了 14 海浬，而距離增率為 0.36%。

例題 2：某船由英國的英格蘭 Land's End(L 50°04.0'N, λ 5°45.0'W)，以大圈航法航行至加拿大的紐芬蘭 St. John's (L 47°34.0'N, λ 52°40.0'W)^[6]。

[欲求]

1. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及初航向、頂點及過赤道點位置；
2. 以頂點為基準，每隔 5° (300 浬)，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離。



圖 6 GCS_Vertex 程式操作結果(例題 2)

[計算] 執行 GCS_Vertex 程式。

[結果與說明]

1. 操作結果與計算結果資訊，分別如圖 6 所示及彙整於表 3。
2. 大圈弧線之基本資訊：大圈距離及其初航向，本文的 GCS_Vertex 程式與查表法及 NGA 的大圈航法之程式，三者所計算的結果均相同；兩頂點位置則以 NGA 的大圈航法之程式，採用「逐一檢驗法」比對，確認 GCS_Vertex 程式計算無誤；另此例題並無過赤道點。
3. 以本文的 GCS_Vertex 程式判定：頂點(51°25.4'N, 23°25.0'W)在大圈航路上。

表 3 GCS_Vertex 程式計算結果 (例題 2)

The great circle distance is 1829.0'				
The great circle initial course is 283.7° (N 76°16.5'W)				
The equator crossing point :				
Nil				
The vertexes :				
1.(51°25.4'N, 23°25.0'W)				
2.(51°25.4'S, 156°35.0'E)				
The vertex 1 on the great circle track				
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	50° 4.0'N	5°45.0'W	283.0°	74.2'
1	50°20.7'N	7°37.7'W	279.2°	300.9'
2	51° 9.0'N	15°25.8'W	273.1°	300.9'
V	51°25.4'N	23°25.0'W	266.9°	300.9'
3	51° 9.0'N	31°24.2'W	260.8°	300.9'
4	50°20.7'N	39°12.4'W	254.9°	300.9'
5	49° 2.2'N	46°40.2'W	249.8°	255.7'
T	47°34.0'N	52°40.0'W		
The total Mercator distance is 1834.6'				
The difference between great circle and Mercator distance is 5.6'				
Increasing rate is 0.30%				

4. 各轉向點位置使用「逐一檢驗法」校對；而各轉向點間的麥氏航向及其距離則以 NGA 的麥氏航法之程式一一檢驗，兩者結果證實本文的 GCS_Vertex 程式的正確性。另此例題，除啓航點、頂點及到達點外，大圈航路上計有 5 個轉向點，麥氏距離總值與大圈距離理論值增加 5.6 海浬，距離增率則為 0.30%。

事實上，「航海學」教材^[1-6] 存在著眾多的實例，除上兩實例外，亦均以「逐一檢驗法」確認本文的 GCS_Vertex 程式，結果皆證實其是正確。

伍、結論

目前國內外的「航海學」教材在求解大圈航法問題仍舊偏好慣用的計算程序，本文經文獻回顧並思考後，提出整合式計算程序，其首先以大圈方程式法計算求得大圈弧線之基本資訊；繼而應用「夾擊定理」概念所創造的方向性判別式判定頂點位置；進而以

其為參考基準點，再配合直角球三的納皮爾法則等相關公式計算大圈航路上各轉向點；最後採用麥氏航法求得其間之麥氏航向及其距離。此外，本文使用 MATLAB[®]程式語言內建的互動式使用者圖形介面，根據此整合式計算程序，成功地開發出慣用的大圈航法之程式，即 GCS_Vertex 程式。該程式皆透過實例證實其正確性。本文之具體結論可供未來研究者參考，如下述：

1. 學理上，大圈方程式法對求解大圈弧線上的任何一點，均能直接且不需判斷以及準確地計算，此論點可透過本文的程式及其實例驗證之。
2. 本文採用夾擊定理概念所創造的方向性判別式，能有效果地判定正確的頂點位置；階段 1 可判定頂點在大圈航路上，階段 2 若頂點不在航路上則選擇與經度差反向之頂點為基準點。
3. 在「給定經度求緯度」計算情境中，為運用直角球三的納皮爾法則等相關公式計算大圈航路上各轉向點，採用「預備變數」思維，為再細分的兩種情況中各分別建立其計算式。而在「給定大圈距離求經緯度」計算情境中，其作法亦類似。
4. 本文的 GCS_Vertex 程式之輸出結果分析，可顯示頂點或過赤道點是否在大圈航路上；亦可直接且準確地計算並臚列出各轉向點及其間的麥氏航向與麥氏距離；另提供麥氏距離總值較大圈距離理論值的增量及其距離增率。此分析更讓使用者對大圈弧線及大圈航路上有更深入的了解。
5. 人性化使用者介面之設計。其不僅容易操作且具有完整的功能表現。

參考文獻

1. 楊籙、薩師洪，**地文航海** 上冊，海圖書局，台北，民國六十七年。
2. 薩師洪，**航海學 第一部領航與推算**，文笙書局，台北，民國八十六年。
3. 周和平，**地文航海學**，周氏兄弟出版社，台灣，民國八十五年。
4. 郭禹，**航海學**，大連海事大學出版社，中國大連，民國八十七年。
5. Bowditch, N., *American Practical Navigator*, National Imagery and Mapping Agency, Washington, DC, 1981 & 2002.
6. Maloney, E.S., *Dutton's Navigation and Piloting*, Naval Institute Press, Annapolis, Maryland, 1985 & 2004.
7. Clough-Smith, J.H., *An Introduction to Spherical Trigonometry*, Brown, Son &

- Ferguson, Ltd., Glasgow, 1966.
8. 徐正梅,「談地球上兩點間的球面距離」, **數學傳播季刊**, 第 23 卷 2 期, 頁 16-23, 民國八十八年。
 9. 陳志立、許添本、張建仁,「大圈航法的直接計算方法」, **海運研究學刊**, 第 15 期, 61-76 頁, 民國九十二年。
 10. National Geospatial-Intelligence Agency, Retrieved Nov 11, 2010, GCS and MS website:
(http://msi.nga.mil/NGAPortal/MSI.portal?_nfpb=true&_pageLabel=msi_portal_page_145&calcCode=05)
 11. Reis, O., *Navigator*, version 4.5 build 151, Celestaire, 2006.
 12. Hohenkerk, C.Y., et al., *NavPac*, Virsion 2.1.2, Council for the Central Laboratory of the Research Councils, 2004.
 13. Chapman, S.J.著, **MATLAB 程式設計與應用**, 張聖明譯, 全華科技圖書股份有限公司, 台北, 民國九十五年。
 14. 李顯宏, **MATLAB 7.X 介面開發與編譯技巧**, 文魁資訊股份有限公司, 台北, 民國九十五年。
 15. 洪維恩, **Matlab7 程式設計**, 旗標出版股份有限公司, 台北, 民國九十五年。
 16. Chen, C.L., *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. dissertation, National Taiwan University, 2003.
 17. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., "A Novel Approach to the Great Circle Sailing: The Great Circle Equation," *The Journal of Navigation*, Vol. 57, No. 2, pp. 311-320, 2004.
 18. 張建仁、陳志立,「極對偶定理在大圈航法上的應用」, **航運季刊**, 第 12 卷 4 期, 頁 1-22, 民國九十二年。
 19. 陳志立、謝宗軒、翁國祐,「球面三角學中四鄰公式之推導與其推論」, **航運季刊**, 第 16 卷 2 期, 67-84 頁, 民國九十六年。
 20. 陳志立、李彥瑤、劉思岑、蔡奇呈,「航海者導向的麥氏航法程式開發」, **海運學報**, 第 17 期, 81-99 頁, 民國九十七年。
 21. National Geospatial-Intelligence Agency, Retrieved Nov 11, 2010, WGS 84 Earth Gravitational Model, website:
(<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html>.)