

旋轉橢球體上二段式恆向線之最短距離

The Shortest Distance of Two Piecewise Rhumb Lines on Spheroid

孫逸家(Yi-Jia Sun)¹、曾維國(Wei-Kuo Tseng)²、蔡金城(King-Cheng Tsai)³

摘要

分段恆向線為航運上常見的航法，在操船上執行容易且能縮短航程。過往對於選取轉向點使航程總距離縮小之研究多建立在地球是正球體(Sphere)的模型上，然地球實為一旋轉橢球體(Oblate spheroid)。精益求精，本文將地球扁率納入考量，以 WGS84 參考系(World Geodetic System 1984)為基礎，將方程式建構在地球為旋轉橢球體的模型上，選取轉向點使分段恆向線總距離最小。並對二段式恆向線作數值實測及分析，該計算結果更符合事實，對於航海誤差小至可忽略的程度。此演算法在許多程式語言中都能輕鬆實現，本文的要旨是促進 GIS(Geographic Information System) 及 ECDIS (Electronic Chart Display and Information System) 的設計人員更準確、高效、輕鬆的編寫軟體，使航海儀器的計算更加精準。

關鍵詞：恆向線、轉向點、最佳化、航路規劃

Abstract

Piecewise rhumb lines sailing is one of the most widely used shipping method which is easy to operation and able to effectively shorten sailing distance. In the past research papers in determining waypoints to shorten the distance were normally based on the fact that the earth is sphere. However, the earth is actually oblate spheroid. Pursuing more precisely, this paper establishes the equations on the oblate spheroid based on WGS84(World Geodetic System 1984). The algorithm can

¹ 國立臺灣海洋大學商船學系碩士生，e-mail:galigege9@gmail.com。

² 國立臺灣海洋大學商船學系教授，e-mail:wilco0917@yahoo.com.tw。

³ 國立臺灣海洋大學附屬基隆海事高級中等學校航海科教師，e-mail:tcc650620@me.com。

determine waypoints to minimize the overall distance of the piecewise rhumb line. We also perform numerical test on the two piecewise rhumb lines of one waypoint, the calculation result fits the fact more closely, and the error is negligible for navigation. The proposed algorithms can be easily implemented by much software language. The gist of this paper is to facilitate navigators and designers of GIS(Graphical Information System) or ECDIS(Electronic Chart Display and Information System) to design the navigational software more accurately, efficiently, and easily.

Keywords: rhumb line, loxodrome, waypoint, optimization, routing

一、緒論

恆向線航法為一般航海上最常見的航行方式，因為船隻得以維持固定航向航行，在實務上帶來十足的便利性，然而，無論將地球視為正球體或旋轉橢球體，其表面上任兩點間最短之距離，在正球體上為大圓(Great circle)，在類球體上為測地線(Geodesic)。若單純沿恆向線航行，隨著起訖點距離愈遠，恆向線與測地線間航程之差將愈大；若單純沿測地線航行，船隻必須不斷改變航向，無疑增加執行上的困難度。因此，如何縮短航程，又兼顧實務操船的可行性，一直是航海學上探究的課題。

傳統上將地球視為正球體，利用分段恆向線行法航行時，為追求實務便利，常見的有等經度差、等距離轉向等；為縮小航程，以分段恆向線逼近大圓，此方法看似直觀且正確，事實上在轉向點數量一樣的情況下，總距離是可以再更縮小的^[1]。再者，地球實為旋轉橢球體，若能將地球扁率納入考量，縮小誤差的結果可想而知。

曾維國(2008)曾建立多段恆向線求取最小總距離之方法^[1]，後續研究再對二段式恆向線最小總距離做了分析，並與 Petrović(2014)之研究結果^[7]相做比較，得證當總距離最小時，轉向點不會在大圓上^[8]。然而，這些研究仍建立在地球為正球體的基礎上。Tseng 等人(2012)曾建構旋轉橢球體上恆向線正反解之方程式^[9]，但尚未有在旋轉橢球體上分析分段恆向線之研究文獻。

世界大地測量系統(World Geodetic System; WGS)是一種用於地圖學、大地測量學和導航的大地測量系統標準，目前最新版本為 WGS84，為 1984 年定義，最後修訂於 2004 年，GPS(Global Positioning System)目前使用的就是 WGS84 參考系^[13]。為使舊有的演算法更加精準，本文將地球扁率納入考量，視地球為旋轉橢球體，以 WGS84 參考系為基礎，結合既有的方法並作更新，以求取旋轉橢球體上多段恆向線的最小總距離，及相對應的轉向點，並就二段式恆向線為實例作數值分析，使方程式之計算結果更接近實際狀況。

二、 恆向線方程式

根據 Tseng 等人(2012)建構的恆向線之方程式^[9]，我們將它表示為式(1)，代表已知兩點由 A(φ_1, λ_1) 至 B(φ_2, λ_2) 的恆向線距離：

$$S_0(\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2) = \sec(\alpha) \cdot \text{DLP}(\varphi_1, \varphi_2) \quad (1)$$

其中 $\text{DLP}(\varphi_1, \varphi_2)$ 表示緯度 φ_1 至緯度 φ_2 的子午線長度：

$$\text{DLP}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (2)$$

其中 e 為地球離心率(Eccentricity)， $e^2 = 1 - b^2 / a^2$ ， a 為地球半長軸(Semi-major axis)， b 為地球半短軸 (Semi-minor axis)，根據 WGS84 參考系， $a = 6378137\text{m}$ ， $b \approx 6356752.314245\text{m}$ 。利用三角恆等式(Trigonometric identities)及二項式定理(Bi-nomial theorem)，式(2)又可以式(3)表示：

$$\text{DLP}(\varphi_1, \varphi_2) = a(1-e^2) \left[M_0 \varphi + \sum_{i=1}^n (-1)^i M_{2i} \sin(2 \cdot i \cdot \varphi) \right] \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (3)$$

其中

$$M_0 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left(-\frac{3}{2} \right) \binom{2k}{k} e^{2k} \quad (4)$$

$$M_{2i} = \sum_{k=i}^n \frac{(-1)^{i+k}}{2^{2k} i} \left(-\frac{3}{2} \right) \binom{2k}{k-i} e^{2k} \quad (5)$$

其中 $n = \infty$ 。然本文使用 64 位元的電腦做數值測試，在雙經度浮點數(Double-precision floating-point format)的條件下，我們取 $n = 6$ 來近似，因當 $n = 7$ 時，式中 e^{14} 已小至電腦無法儲存、計算，該精度也足夠滿足航海上的使用條件了。

而式(1)中的 α 為航向：

$$\alpha = \arctan2(d\lambda, \text{DMP}(\varphi_1, \varphi_2)) \quad (6)$$

其中 $d\lambda$ 為經度差，相對於 $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ 可能導致優弧(Major arc)，例如 $\lambda_1 : 100^\circ\text{W}$ ， $\lambda_2 : 120^\circ\text{E}$ 則 $d\lambda = 120^\circ - (-100^\circ) = 220^\circ$ ，有鑑於此， $d\lambda$ 需同式(7)處理：

$$d\lambda = \pi \cdot \left[\frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\pi} - 2 \cdot \text{ceil} \left(\frac{|\lambda_2 - \lambda_1| - 1}{2} \right) \right] \cdot \text{sign}(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (7)$$

其中 $\text{ceil}(x)$ 代表大於等於 x 之最小整數， $\text{sign}(x)$ 代表 x 之正負號。而式(6)中的 $\text{DMP}(\varphi_1, \varphi_2)$ 為緯度 φ_1 至緯度 φ_2 的子午線漸長比數差：

$$\begin{aligned} \text{DMP}(\varphi_1, \varphi_2) &= a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sec(\varphi)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^2} d\varphi \\ &= \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin(\varphi)}{1 + e \sin(\varphi)} \right)^{e/2} \right] \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \end{aligned} \quad (8)$$

上述各項如圖 1 所示。

然式(1)在子午線長度 $\text{DLP} = 0$ 時，也就是航向為正東或正西時無法使用，因此在起訖點緯度相同的情況下，求取距離之方程式需改如下：

$$S_1(\varphi, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{a \cdot d\lambda \cdot \cos(\varphi)}{(1 - e^2 \sin(\varphi))^{1/2}} \quad (9)$$

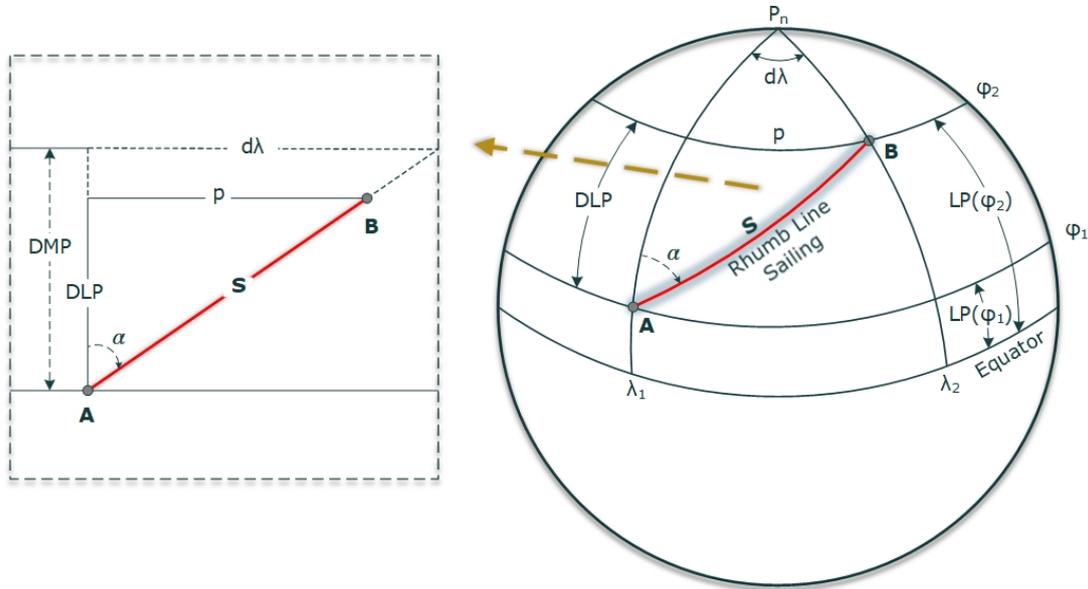


圖 1

三、 多段恆向線的最小距離及轉向點

3.1 求取轉向點及距離

計算多段恆向線時，我們加入一判別式，當相鄰兩點緯度不同時，使用式(1)計算，反之改以式(9)計算，寫成式(10)^[8]：

$$S(X) = \sum_{i=1}^n \text{IIF}(\varphi_i \neq \varphi_{i+1}, \sec(\alpha_i) \cdot \text{DLP}(\varphi_i, \varphi_{i+1}), \frac{a \cdot d\lambda \cdot \cos(\varphi)}{(1 - e^2 \sin(\varphi))^{1/2}}) \quad (10)$$

其中 $X = \varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \dots, \varphi_{n-1}, \lambda_{n-1}$ ，而 IIF 函數的判斷語法為(判斷條件，條件成立的值，條件不成立的值)。

我們的問題便成為一非線性且多變數的最佳化問題，變數即為 X 內各項。由於要追求方程式的最小值，從微積分定理得知：當函數值為極值時，一階導數必為 0，因此我們可以將式(10)的一階導函數設為式(11)：

$$F(X) = \frac{\partial S}{\partial X} = \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi_{n-1}} \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda_{n-1}} \right]^T \quad (11)$$

$$= [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_{2n-3} \quad F_{2n-2}]^T = 0$$

經過一些微分運算， $F(X)$ 內各項可用下列通式表示：

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = \sin(\alpha_i) \frac{DMP(\varphi_{i-1}, \varphi_i)'}{(DMP(\varphi_{i-1}, \varphi_i))^2} + \sec(\alpha_i) DLP(\varphi_{i-1}, \varphi_i)' \quad (12)$$

$$+ \sin(\alpha_{i+1}) \frac{DMP(\varphi_i, \varphi_{i+1})'}{(DMP(\varphi_i, \varphi_{i+1}))^2} + \sec(\alpha_{i+1}) DLP(\varphi_i, \varphi_{i+1})'$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = \frac{\sin(\alpha_i) DLP(\varphi_{i-1}, \varphi_i)}{DMP(\varphi_{i-1}, \varphi_i)} - \frac{\sin(\alpha_{i+1}) DLP(\varphi_i, \varphi_{i+1})}{DMP(\varphi_i, \varphi_{i+1})} \quad (13)$$

對於非線性的最佳化問題，求解並不容易，其難度取決於非線性的性質與程度，雖有許多既有的演算法，但沒有任何一樣絕對通用於所有問題，針對不同問題選用適切的方法也是一門學問。鑒於我們的問題在變數（轉向點經緯度）與函數值（恆向線總距離）之間的變化是連續且平滑的，在此本文選用牛頓-拉弗森方法(Newton-Raphson method)處理：

$$F(X_{k+1}) = F(X_k) + J(X_k) \cdot (X_{k+1} - X_k) \quad (14)$$

其中 $J(X_k)$ 為雅可比矩陣(Jacobian matrix)，即 $F(X_k)$ 的一階偏導數矩陣：

$$J(X_k) = \frac{\partial F(X_k)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2n-2}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial F_{2n-2}}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial F_{2n-2}}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial F_{2n-2}}{\partial \lambda_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)代表 $2n-2$ 個超平面，這些超平面(Hyperplanes)的交集為一條超直線(Hyperline)，透過假設 $F(X_{k+1})=0$ 可以找到這條超直線與超水平面的交點，即系統方程式的根。因此我們將式(14)移項寫成式(16)，迭代運算以逼近根來求解：

$$X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1} \cdot F(X_k) \quad (16)$$

當 X 收斂至可接受的範圍，便求得各轉向點經緯度，將其帶回式(10)，即可求得分段恆向線總距離。

由於式(11)（式(12)、式(13)）結構複雜，一階偏導數不易導出，即式(15)難以直接求出。因此我們使用割線法(Secant method)來近似，即以割線來近似一階偏導數：

$$J(X_1) \cong \lim_{X_1 \rightarrow X_0} \frac{F(X_1) - F(X_0)}{X_1 - X_0} \quad (17)$$

$$J(X_k) \cong \frac{F(X_k) - F(X_{k-1})}{X_k - X_{k-1}} \quad (18)$$

在迭代的計算過程中，最初使用式(17)：輸入一極接近初始值 X_0 的 X_1 求得第一次迭代的雅可比矩陣 $J(X_1)$ 。之後每次的迭代計算皆使用式(18)：輸入該次新得出的 X_k 與前次的 X_{k-1} 來求取該次的雅可比矩陣 $J(X_k)$ 。

需要注意的是，式(12)、式(13)的 $F(X)$ 通式及式(15)雅可比矩陣 $J(X)$ 都僅來自式(1)，不包含式(9)，我們只考慮 $\varphi_i \neq \varphi_{i+1}$ 的情況，因牛頓法的迭代過程中，要遇到 $\varphi_i = \varphi_{i+1}$ 的狀況微乎其微，整個演算法結構複雜過程繁瑣，為求計算效率便不將緯度相同的方程式考慮在內。建議以判斷式：當 $\varphi_i = \varphi_{i+1}$ 時，終止計算並輸入其它初始值重新計算為佳。

3.2 二段式恆向線——單一轉向點之情況

根據式(10)，我們可以得出求取二段式恆向線距離的方程式（不考慮轉向點與起訖點緯度相同的情況）：

$$S(X) = \sec(\alpha_1) \cdot DLP(\varphi_1, \varphi_x) + \sec(\alpha_2) \cdot DLP(\varphi_x, \varphi_2) \quad (19)$$

其中 $X = \varphi_x, \lambda_x$ ，即該轉向點之緯度與經度。

當函數為最小值時，一階導數為 0，我們將式(19)的一階導函數用 $F(X)$ 表示：

$$F(X) = \frac{\partial S}{\partial X} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial S}{\partial \lambda_x} \end{bmatrix}^T = 0 \quad (20)$$

其中

$$F_1 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_x} = \sin(\alpha_1) \frac{DMP(\varphi_1, \varphi_x)'}{(DMP(\varphi_1, \varphi_x))^2} + \sec(\alpha_1) DLP(\varphi_1, \varphi_x)' + \sin(\alpha_2) \frac{DMP(\varphi_x, \varphi_2)'}{(DMP(\varphi_x, \varphi_2))^2} + \sec(\alpha_2) DLP(\varphi_x, \varphi_2)' \quad (21)$$

$$F_2 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_x} = \frac{\sin(\alpha_1) DLP(\varphi_1, \varphi_x)}{DMP(\varphi_1, \varphi_x)} - \frac{\sin(\alpha_2) DLP(\varphi_x, \varphi_2)}{DMP(\varphi_x, \varphi_2)} \quad (22)$$

再利用牛頓法來逼近以求取 $F(X) = 0$ 的根，雅可比矩陣為：

$$J(X_k) = \frac{\partial F(X_k)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_x} \end{bmatrix} \quad (23)$$

經過式(16)的牛頓法方程式迭代運算後，便可得出轉向點經緯度，將其帶回式(19)即可計算總距離。

四、 數值測試

市面上有許多可解決類似的非線性最佳化問題的既有軟體，諸如 Matlab[®]、Mathematica[®]、Cplex[®]等，本文使用 Maple[®]、Microsoft Excel[®]搭配內建 Visual Basic for Applications[®]的編寫作為解決相關問題的工具。

今欲自 A(25°N,121°E)前往 B(40°N,140°W)，作二段式恆向線航法航行。利用 3.2 節建構的方程式，可以求得轉向點在 X(44°45.08'N,171°22.55'E)時總距離會最小，約 9095.669 公里。總距離與轉向點經緯度二變數的關係如圖 2，可以看出總距離的變化趨勢，以轉向點 X 為極小值沿 x、y 軸以類二次函數的曲線向外增加。對於這樣的結果，以下將從正確性及運算效率兩點作分析。

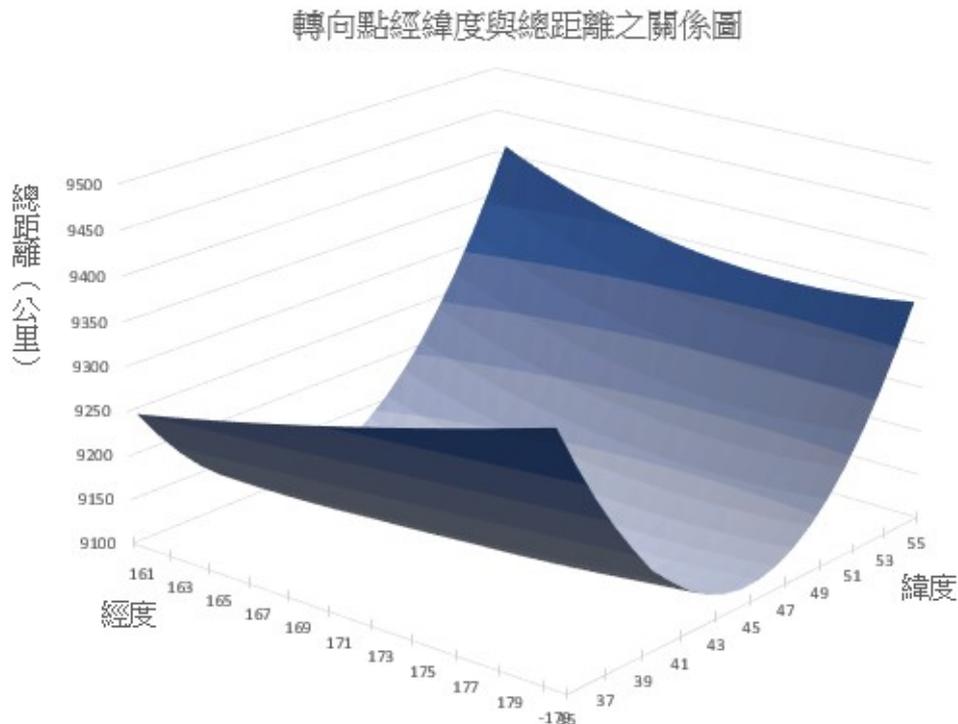


圖 2

Microsoft Excel[®]內建的規劃求解增益集具有最佳化問題的求解工具，其中的廣義簡約梯度方法(Generalized Reduced Gradient;GRG)由 Lasdon 等人(1978)開發^[5]，適用於可微分的函數，廣泛應用於許多非線性最佳化問題^{[3] [6]}。與本文方法計算結果相作比較，可得誤差值小至可忽略，得以確定本文方法的正確性。

牛頓法使用的是迭代運算，迭代次數是運算效率好壞的重要因素，而影響迭代次數的除了精度的要求之外，便是選用的初始值 X_0 。Tseng(2014)在球體上是選用中經度及對應在大圓上緯度作初始值，鑒於本文建立在旋轉橢球體上，因此建議初始值選用中經度及對應於大橢圓上的緯度^[10]：

$$\begin{bmatrix} \varphi_{x0} \\ \lambda_{x0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \left(\tan(\varphi_1) \cdot \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_m)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} + \tan(\varphi_2) \cdot \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_1)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 $\lambda_m = \lambda_1 + d\lambda / 2$ 。

表 1

精度要求 \ 初始值	$\begin{bmatrix} 45.14325^\circ\text{N} \\ 170.5^\circ\text{E} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (\varphi_x \pm 1)^\circ\text{N} \\ (\lambda_x \pm 1)^\circ\text{E} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (\varphi_x \pm 10)^\circ\text{N} \\ (\lambda_x \pm 10)^\circ\text{E} \end{bmatrix}$
10^{-5}	$\begin{bmatrix} 7.16 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.07 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.82 \times 10^{-6}\text{m} \\ 4 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.16 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.07 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.84 \times 10^{-6}\text{m} \\ 4 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.16 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.07 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.84 \times 10^{-6}\text{m} \\ 8 \text{ 次} \end{bmatrix}$
10^{-3}	$\begin{bmatrix} 7.16 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.07 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.80 \times 10^{-6}\text{m} \\ 3 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.19 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.09 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.83 \times 10^{-6}\text{m} \\ 4 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.16 \times 10^{-5}^\circ \\ 1.08 \times 10^{-4}^\circ \\ 9.82 \times 10^{-6}\text{m} \\ 7 \text{ 次} \end{bmatrix}$
10^{-1}	$\begin{bmatrix} 1.38 \times 10^{-4}^\circ \\ 6.99 \times 10^{-4}^\circ \\ 1.35 \times 10^{-4}\text{m} \\ 2 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.25 \times 10^{-4}^\circ \\ 2.57 \times 10^{-3}^\circ \\ 1.06 \times 10^{-3}\text{m} \\ 3 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.71 \times 10^{-4}^\circ \\ 3.83 \times 10^{-3}^\circ \\ 4.44 \times 10^{-3}\text{m} \\ 6 \text{ 次} \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 4.79 \times 10^{-3}^\circ \\ 4.76 \times 10^{-2}^\circ \\ 3.17 \times 10^{-1}\text{m} \\ 1 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.15 \times 10^{-2}^\circ \\ 1.80 \times 10^{-1}^\circ \\ 4.84\text{m} \\ 2 \text{ 次} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.00 \times 10^{-2}^\circ \\ 7.06 \times 10^{-2}^\circ \\ 3.38\text{m} \\ 5 \text{ 次} \end{bmatrix}$

在本例中，以式(24)求得初始值 $X_0 = [45.14325^\circ\text{N} \ 170.5^\circ\text{E}]^T$ ，比較使用不同範圍的初始值，並在不同計算精度的要求下，與 Microsoft Excel[®]內建規劃求解 (GRG 法) 得出的最佳解作比較，得到各誤差值與迭代次數，結果如表 1。其中 $[\varphi_x \ \lambda_x]^T = [44^\circ45.07'\text{N} \ 171^\circ22.54'\text{E}]^T$ ，為使用 Microsoft Excel[®]內建的 GRG 法求出之最佳解。表格內第一項為緯度、經度之最大誤差 $[\Delta\varphi \ \Delta\lambda]^T$ ，單位是度；第二項為總距離之最大誤差，單位是公尺；第三列為最高迭代次數。「精度要求」是針對經緯度而言，如：「精度要求『1』」代表運算過程中，若 $|X_{k+1} - X_k| > 1$ (單位：度)，則需再進行一次牛頓法迭代。

從表 1 中可以看出精度要求、初始值不同時迭代次數與誤差值的改變，精度要求愈高，誤差愈小但迭代次數愈高；初始值距離最佳解愈遠，迭代次數愈高，反之亦然，其中可以看出以式(24)出發的收斂速度多優於最佳解正負 1 度的初始值，可見該初始值之效果。使用者可以視使用需求或計算機配備改變精度要求，對於航海追求最短距離而言，總距離之誤差值可達微米級，絕對是可以滿足需求了。然經緯度誤差方面，雖以度為單位而言看似很小，實際上是公尺級以上，這與我們的演算法輸入以度為單位，以及電腦計算精度有關，如何使其更加精確是後續研究可以探討的。

與 Tseng(2012)先前建構在正球體上的演算法^[8]比較，結果如表 2 所示。其中正球體 $e = 0$ ，而半徑為

$$r = \frac{360 \cdot 60 \cdot 1852}{2\pi} \cong 6366707.0195(\text{m}) \quad (25)$$

表 2

	φ_x	λ_x	總距離
旋轉橢球體	44°45.08'N	171°22.55'E	9095668.543m
正球體	44°41.91'N	171°22.48'E	9072365.714m
誤差	$(5.27 \times 10^{-2})^\circ$	$(1.10 \times 10^{-3})^\circ$	23302.829m

如表 2 所示，總距離之誤差達到二十多公里，可見地球模型之重要。然在轉向點經緯度方面，改善幅度看似仍有限，畢竟根據 WGS84 參考系的測量，地球的扁率(Flattening)

只有 $1/298.257223563$ ，還是一極為接近球體的旋轉橢球體，然將表 2 與表 1 相作比較，經緯度的誤差值可達上千倍，改善的成效可見一斑。

五、 結論

本文整理了旋轉橢球體上已知兩點計算恆向線距離與航向（反解）的公式，並建構了選取最短總距離之轉向點的方法，使分段恆向線的計算更接近實際情況，讀者也得以理解該航法的概念及其中的演算邏輯。並分析了精度要求及結果誤差、迭代次數之間的關係，使用者可以視使用需求或計算機配備進行調整。對於後續研究有下列幾項建議：

1. 計算過程中尚未加入限制式，如：轉向點需在測地線或大橢圓上、等距離轉向、等經度差轉向等。
2. 對於更多轉向點之情況尚未有數值分析，仍存有變數。
3. 轉向點經緯度與最佳解之誤差達公尺級，尚有改善空間。

本文的演算法在許多程式語言中都能輕鬆實現，如 C++、JavaScript、Java、Python 等，得以促進 GIS 及 ECDIS 的設計人員更準確、高效、輕鬆的編寫軟體，使電子航儀的計算能更加精準。

誌謝

本文特別感謝國立臺灣海洋大學海事發展與訓練中心學術獎勵補助。

參考文獻

1. 曾維國，2008。多段恆向線航法-最短距離之航路。台北海洋技術學院學報，第 1 卷(第 2 期)，123-136。
2. Bowditch, N., 2002. *The American Practical Navigator*. Bicentennial ed. Bethesda, Maryland: National Imagery and Mapping Agency.
3. Chapra, S. C. & Canale, R. P., 2010. *Numerical Methods for Engineers*. 6th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education.
4. Deakin, R. E. & Hunter, M. N., 2010,1. *Geometric Geodesy*. 2nd ed. Melbourne: RMIT University.
5. Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A. & Ratner, M., 1978. Design and Testing of a Generalized Reduced

- Gradient Code for Nonlinear Programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3, 4(1), pp. 34-50.
6. Maia, A. et al., 2017. Numerical optimization strategies for springback compensation in sheet metal forming. In: *Computational Methods and Production Engineering Research and Development*. Duxford: Woodhead Publishing, pp. 51-82.
 7. Petrović, M., 2014. Orthodrome-loxodrome Correlation by the Middle Latitude Rule. *The Journal of Navigation*, Issue 67, pp. 539-543.
 8. Tseng, W. K., 2014. *The Shortest Overall Distance of Two Piecewise*. Xiamen, China, 2014 10th International Conference on Natural Computation, pp. 1153-1157.
 9. Tseng, W. K., Earle, M. A. & Guo, J. L., 2012. Direct and Inverse Solutions with Geodetic Latitude in Terms of Longitude for Rhumb Line Sailing. *The Journal of Navigation*, Issue 65, pp. 549-559.
 10. Tseng, W. K., Guo, J. L. & Liu, C. P., 2015. The Geometric Algorithm of Inverse and Direct Problems With an Area Solution for the Great Elliptic Arcs. *Journal of Marine Science and Technology*, 23(4), pp. 481-490.
 11. Tseng, W. K. & Lee, H. S., 2007. Building the Latitude Equation of the Mid-Longitude. *The Journal of Navigation*, Issue 60, pp. 164-170.
 12. Wikipedia, 2020. *Secant method*. [Online]
Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Secant_method
[Accessed 8 2020].
 13. Wikipedia, 2020. *World Geodetic System*. [Online]
Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System
[Accessed 8 2020].