

## 重新審視等高圈的割線及其發現<sup>\*</sup>

### A Revisit on Sumner Line of Equal Altitude Circle and its Discovery

陳志立<sup>\*</sup>、陳可蓉<sup>\*\*</sup>、林泰亨<sup>\*\*</sup>

#### 摘要

美國商船船長 Sumner 所提出的 Sumner 線，此首創不僅簡化天文船位的計算，亦開啟了實用航海學的新時代。重新審視其貢獻，即從幾何學觀點，可發現其就是等高圈的割線，繼而以此建構割線方程組(SLE)，去求解雙天體天文船位問題，進而延伸求解多天體天文船位(nAVP)問題。由於 Sumner 線具有試誤性質，故必須引進迭代機制來改進天文船位的準確性。值得注意的是對不同的觀測時間，須以航進定位概念並採用平均緯度航法，去移動參考點，以計算求得定位時間的天文船位。另外，本研究採用統計學求解多天體天文船位問題，其合理解集合應是天文船位及其誤差(AVP-ER)。本研究使用割線方程組自行開發程式，命名為 nAVP\_SLE，以提供航海者使用。最後，將挑選數個標準計算實例驗證本研究方法的準確性與其廣泛的適用性。

**關鍵詞：**Sumner 線、天文船位、割線方程組、迭代機制、航進定位。

---

<sup>\*</sup> 本文是國立臺灣海洋大學研究計畫(NTOU-105-001)之部分成果，承蒙經費補助，謹此致謝。

<sup>\*</sup> 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系教授，國立臺灣大學工學博士。

E-mail: [clchen@mail.ntou.edu.tw](mailto:clchen@mail.ntou.edu.tw)

<sup>\*\*</sup> 陳可蓉 Ko-Jung Chen，國立臺灣海洋大學商船學系碩士生。

<sup>\*\*</sup> 林泰亨 Tai-Heng Lin，國立臺灣海洋大學商船學系碩士生。

## ABSTRACT

The discovery of the Sumner line was first proposed by Captain Thomas H. Sumner of United States. It is not only simplifying calculation of the astronomical vessel position (AVP) but is also opening a new era in practical navigation. After revisiting this contribution, in which the Sumner line is actually found to be the secant line of equal altitude circle in viewpoint of Geometry. The secant line equations (SLE) were developed to deal with the two-body AVP problems and further extended to resolve the multi-bodies AVP (nAVP) problems. Due to the trial-and-error characteristic of the Sumner line, an iteration scheme is introduced to improve numerical accuracy. It is noted that when the reasonable solution set of the nAVP problem should fall into the real AVP within an acceptable error range (AVP-ER) by using statistics. Based on the SLE, a program namely nAVP-SLE was developed for the navigator. Finally, several benchmark examples will be conducted to validate the accuracy and versatility of the novel approach.

**Key words:** Sumner line, Astronomical vessel position (AVP), Secant line equations, Iteration scheme, Running fix.

## 壹、緒論

全球導航衛星系統(global navigation satellite system, GNSS)，如美國 GPS 或俄羅斯 Glonass，由於其高效用與低成本的接收設備，被廣泛地應用於運具定位；然其除受軍方加密外，該系統尚有其操作缺點如干擾噪音或欺騙信號等[1-3]。1995 年客船“Royal Majesty”擱淺事故，引發海事相關的國際機構(IMO, ICS, OCIMF)以及美國與英國的機關(NTSB, MCA)等關注[4]；除要求「交叉確認船位」外，IMO 更在 1978 年航海人員訓練、發證與當值標準國際公約 2010 年修正案(STCW 78/95/10)裡，B 篇建議準則第 B-II/1 節 20 條提出「得使用天文航海計算軟體」[5]，據此，引進計算科技於存在百餘年的天文航海學，已成為必然之趨勢，此引發本研究的起始動機。

美國物理學家萬伯格(Steven Weiberg, 1933-)的黃金經驗：「多閱讀科學史，或起碼是你專業的歷史，因為它可讓你知道你的工作在人類文明中的價值。」[6]，據此，回顧天文航海科技史，天文船位之概念係源自於「球面等高圈」(equal circle of altitude, EAC)，將其繪製於海圖上，則為天文位置圈(circle of position, COP)，即當天體觀測高度大於 87°情境，可直接地獲得 COP，故稱為「高高度觀測法」(high altitude observation, HAO)；然若天體觀測高度小於 87°時，則因作圖困難或 COP 不精確等兩大理由，使得觀測天體高度求解天文船位的構思無法全面實施。幸好在 1837 年美國商船船長薩姆納(Thomas Hubbard Sumner, 1807-1876)[7]首先提出「以直線取代曲線」概念，此天文位置

線(line of position, LOP)，即稱為“Sumner line”，該創意改變求解天文船位方法的思維，其不但簡化天文船位的計算並為美國海軍所採用且迅速傳播至歐洲海事國家[8]；又於1875年，法國海軍艦長聖希萊爾(Marcq de Blond de Saint-Hilaire, 1832-1889)將前述 LOP 調整為在 COP 上的切線 LOP(tangent LOP)，此即稱為“Hilaire method”或「截距法」(intercept method, IM)；至此，該兩類 LOP 開展了實用航海學的新時代(new era)[9]。為提供各國商船的航行員方便應用天文航海學，自1936年起，以截距法為主，美國與英國聯合製作航海曆(nautical almanacs, NA)和測天簡算表冊(sight reduction tables)等配合之；導致目前不論海事教育訓練或海上實務作業，天文航海學均採用高高度觀測法或截距法等兩種方法[10-18]；然令人好奇的是最初創意“Sumner line”能否再度展現其準確性與適用性？又它的幾何意義或數學方程為何？能否處理多天體天文船位問題？一再地引發本論文的強烈動機。

德國哲學家叔本華(Arthur Schopenhauer, 1788-1860)的洞察：「創造力最重要的不是發現前人所未見，而是在人人所見的現象裡，想到前人所未想到。」(“The task is, not so much to see what no one has seen yet; but to think what nobody has thought yet, about that what everybody sees.”)[19]，鑑此，從幾何學觀點，若截距法為在 COP 上的切線 LOP，則“Sumner line”[7]可稱之為在 COP 上的割線 LOP(secant LOP)；那如何建構此一割線方程？將於第二章推導之。

前述單一天體之慣用圖解法，即 COP 或 LOP，係無法決定天文船位；而欲獲得天文船位(astronomical vessel position, AVP)，則必須至少有雙天體的資訊。事實上，自1970年起，因為計算科技已有顯著地進步，應用雙天體位置圈(COPs)或雙天體位置線(LOPs)的概念，並進而採用不同的數學方法求解天文船位(AVP)的相關論文相繼地發表，它們增添並豐富了天文航海學的內容。但必須強調的是，分類係為概念外延的邏輯方法，其要求有二，一是分類標準，另一則為既不遺漏且不重複；其方法在數學上的直接表現就是「集合分割」(set partition)；據此，雙天體天文船位問題，其數學方法依概念可分為聯立曲線方程組(COPs)以及聯立直線方程組(LOPs)，前者又可細分為代數法(algebraic methods, COPs-AM)[20-27]與球三法(spherical trigonometry, COPs-ST)[24-26, 28-35]；後者則可再分為切線法(tangent LOPs) [36]和割線法(secant LOPs) [37-40]；上述的分類於回顧性論文[41]有更深入地說明。上述四種方法中，球三法求解聯立曲線方程組(COPs-ST)，其計算程序係為間接且輾轉求解，並有五個步驟皆必須使用球三公式，其數學方法即是球面三角學[24-26]，故就不贅述，因此，除 COPs-ST 外，雙天體天文船位問題的各計算方法之比較表，如表 1 所示；表中論文[38-40]亦採用割線方程組求解聯立曲線方程組(LOPs-SLE)，然很可惜的是，其建構的思維，被其航海知識的框架所約束，因此本論文則從代數觀點，簡化地構建割線方程組(SLE)，另外，表 1 中所提及航進定位(running fix)概念，由於該航行係在小面積的範圍，所以本論文採用平均緯度航法(mean latitude sailing)，這些都將於第二章說明。

表 1. 雙天體天文船位的各計算方法之比較表

作者(發表年份)	聯立方程組	數學方法	航進定位
Flynn (1972)	邊餘弦律與正弦律	Taylor 級數	無
Fox (1975)	聯立邊餘弦律	逼近理論	無
Wight (1976)	聯立割線方程組	幾何分析	無
Ogilvie (1977)	聯立邊餘弦律	逼近理論	無
Van Allen (1981)	聯立邊餘弦律	座標轉換	無
Chen (2003)	聯立邊餘弦律	三角方程	有
Chen et al. (2003)	聯立邊餘弦律	三角方程	有
Hsu et al. (2005)	聯立邊餘弦律	三角方程	有
Chen et al. (2014)	聯立割線方程組	兩割線代數解	有
龔韋婷 (2014)	聯立切線方程組	幾何分析	有
Hsu et al. (2017)	聯立割線方程組	兩割線代數解	有
郭倍宏 (2017)	聯立邊餘弦律	粒子群演算法	有
翁國祐 (2017)	聯立割線方程組	兩割線代數解	有
<b>本論文 (2019)</b>	<b>聯立割線方程組</b>	<b>代數解</b>	<b>有</b>

表 2. 多天體天文船位的各計算方法之比較表

作者(發表年份)	數學方法	預判機制	誤差範圍
DeWit (1974)	最小平方法	無	有
Severance (1989)	最小平方法	無	無
Metcalf and Metcalf (1991)	Lagrange 乘數法	無	無
Kaplan (1995)	最小平方法	無	無
Tsou (2012)	基因演算法	無	無
Tsou (2015)	粒子群演算法	無	無
郭倍宏 (2017)	粒子群演算法	有	有
<b>本論文 (2019)</b>	<b>兩割線代數解</b>	<b>有</b>	<b>有</b>

多天體天文船位問題係基於雙天體天文船位為基礎進而延伸，合理的解集合為真實之天文船位(AVP)及其誤差範圍(real AVP within an error range, AVP-ER)，本論文採用統計學的「算術平均及其標準差」表示之；另外，因觀測天體高度必存在誤差，故設計多天體天文船位的散佈圖(scatter chart)之預判機制(prejudge mechanism, PM)，實有其必要性；且該散佈圖不僅可做為航海者之判斷亦可作為 AVP-ER 判定的依據，將於第三章實例中討論。

至於多天體天文船位問題的各計算方法之比較表[27, 42-47]，如表 2 所示。很明顯地發現，同樣採用割線方程組的論文[38-40]皆不能處理多天體天文船位問題，此亦是本論文的一動機與貢獻。

學理上，有概念才能創造出方法論之架構，進而建構數學方法及其計算程序。除本章緒論外，後續章節安排如下：第二章是建構方法論暨計算程序；第三章為實例驗證及討論；最後，結論則臚列於第四章。

## 貳、建構方法論暨計算程序

割線方程組求解雙天體天文船位問題的整體概念，如圖 1 所示，首先在推算船位之緯度( $L_{DR}$ )附近建立初始邊界，即 $[aL_{i1}, aL_{i2}]$ ，上下邊界就是兩假設緯度，並使用該兩假設緯度與天體  $i$  的球面等高圈(EAC $_i$ )相交於  $P_{i1}$  與  $P_{i2}$ ，連接兩點的直線就是“Sumner line”或稱割線 LOP，該思維係以直線取代曲線，簡化計算。更為突破航海學框架，將之轉換至直角座標系統，如圖 2 所示，則割線方程組及其代數解即可輕易地建構，而兩割線的交點即為天文船位(AVP)。又由於該方法隱含著試誤法(trial-and-error)特質，會產生誤差，故採用迭代機制(iteration scheme)消除之，而該機制有兩步驟，迭代 1：為確保兩點必在球面等高圈上，故引進球面三角公式，其推論流程如圖 3 示；迭代 2：以天文船位的緯度( $L_{AVP}$ )取代原先的推算船位緯度( $L_{DR}$ )並縮減(適應)邊界，重新計算天文船位(AVP)，直至前後兩者相同時，即表示獲得真實的天文船位。這一整體的程序可歸納為「以直代曲、沿曲求真、不變為真。」[27, 36, 41]，另外，在計算之前，必須使用航進定位(running fix)概念並採用平均緯度航法(mean latitude sailing)，將不同觀測時間的各參考點(reference point, RP)調整至給定的定位時間。

首先是方法論構建，其內容有平均緯度航法、適應邊界技巧、迭代機制、割線方程組及其代數解以及統計學等；進而分別說明雙天體及多天體的天文船位之計算程序。

### 2.1 建構方法論

在計算之前，由於不同天體的觀測時間是不同的，所以必須依據航進定位概念並採用平均緯度航法，將不同觀測時間的各參考點(RP)調整至定位時間；為了順利獲得割線上的兩點，必須引進適應邊界技巧(adaptive boundaries technique, ABT)製造出合理的初始邊界如圖 1 示；更為確保兩點必在球面等高圈上，必須使用球面三角公式如圖 3 示；而有了兩點即可轉換至直角座標系統如圖 2 示，則可建構割線方程組及其代數解，再將代數解反轉換為天文船位(AVP)。由於「以直代曲」會有船位誤差，所以必須採用迭代機制來消除之，該機制有兩步驟，即「沿曲求真、不變為真。」，另外，多天體天文船位係基於雙天體天文船位為基礎而延伸，本論文係以統計學的「算術平均(mean)及其標準差(standard deviation, SD)」來表示「多天體天文船位及其誤差範圍」(AVP-ER)。

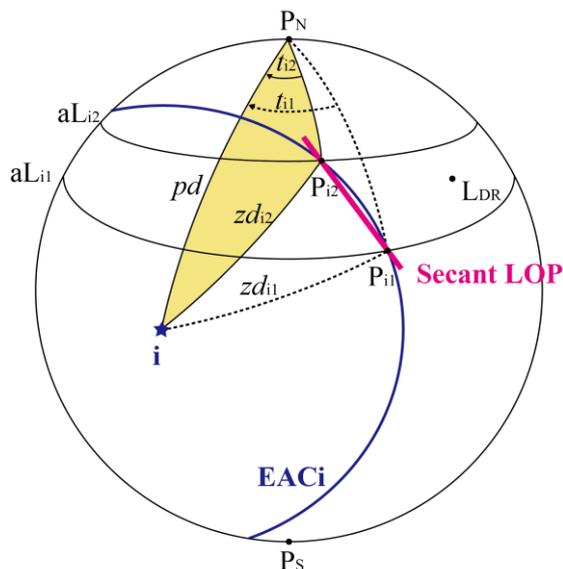


圖 1. 割線方程組求解雙天體天文船位概念示意圖

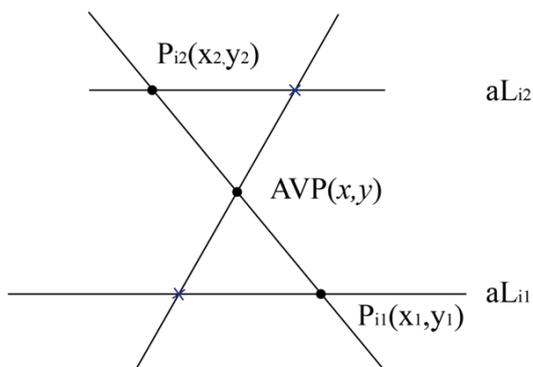


圖 2. 直角座標系統的割線示意圖

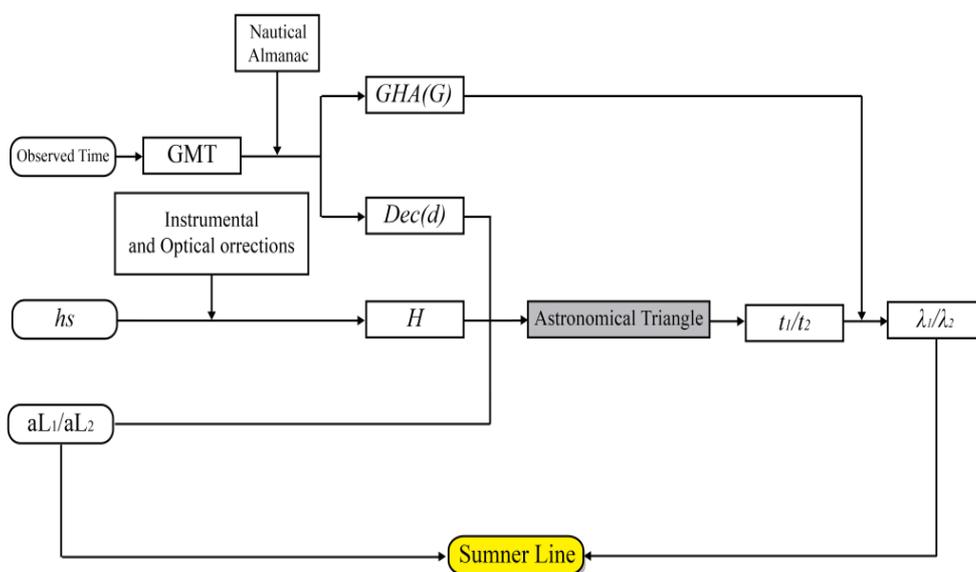


圖 3. 在球面等高圈的割線(Summer line)上兩點的推論流程圖

## 1. 平均緯度航法

平均緯度航法係是航進定位概念之應用，即計算各參考點的移動。已知船舶航速( $Sp$ )、航行時間( $\Delta t$ )及航向角( $C$ )；若給定起航點( $L_f, \lambda_f$ )，依序可得航距( $D$ )、緯度差( $\Delta L$ )、平均緯度( $L_m$ )、經度差( $\Delta \lambda$ )以及橫距( $p$ )，最後則可計算求得到達點( $L_t, \lambda_t$ )；其相關公式如下：

$$D = Sp \times \Delta t, \quad (1a)$$

$$\Delta L = D \cos C, \quad L_m = L_f + \frac{1}{2}(\Delta L), \quad \Delta \lambda = p \sec L_m = (D \sin C) \sec L_m, \quad (1b)$$

$$L_t = L_f + \Delta L, \quad \lambda_t = \lambda_f + \Delta \lambda. \quad (1c)$$

本論文的參考點有推算船位(DR)、各天體  $i$  的地理位置(GP)以及其在不同觀測時間的割線之兩點(Summer point)等。

## 2. 適應邊界技巧

基於「觀測絕對優於推算」，故推算船位之緯度( $L_{DR}$ )的邊界( $I$ )不一定是固定向北或向南 10 分弧之邊界，即 $\pm 10'$ ，而是受限於各天體的赤緯(declination,  $d$ )及其觀測高度(observed altitude,  $H$ )，鑑此，引進球面三角的「兩邊之和大於第三邊」性質，進而歸納出「合理適應邊界」。天體  $i$  的合理適應邊界之下限( $LB_i$ )及上限( $UB_i$ )，依適應邊界技巧可決定初始邊界 $[aL_{i1}, aL_{i2}]$ ，相關公式如下：

$$LB_i = d_i - (90^\circ - H_i), \quad i = 1, 2; \quad (2a)$$

$$UB_i = d_i + (90^\circ - H_i), \quad i = 1, 2; \quad (2b)$$

$$[aL_{i1}, aL_{i2}] = \begin{cases} [L_{DR} - I, L_{DR} + I], & \text{if } LB_i \leq L_{DR} \mp I \leq UB_i; \\ [LB_i, LB_i + 2I], & \text{if } L_{DR} - I < LB_i; \\ [UB_i - 2I, UB_i], & \text{if } L_{DR} + I > UB_i. \end{cases} \quad (2c)$$

另外，在迭代 2：以天文船位的緯度( $L_{AVP}$ )取代原先的推算船位緯度( $L_{DR}$ )；若  $n$  為迭代次數，則縮減(適應)邊界公式如下：

$$I = 10' \times 2^{-n}. \quad (2d)$$

### 3. 球面三角公式之選用

如圖 1 所示，兩假設緯度平行圈，即  $aL_{i1}$  與  $aL_{i2}$ ；若已知球三的三邊，欲計算任一角，則最適當的公式就是球三的邊餘弦律(side cosine law)，其可分別獲得在  $EAC_i$  上的兩點的經度。若已知兩假設緯度， $aL_{i1}$  與  $aL_{i2}$ ，天體  $i$  的天赤道座標，即赤緯( $di$ )及格林威治時角( $Gi$ )，以及觀測高度( $Hi$ )，依圖 3 示，採用邊餘弦律可分別求得兩個球三的子午角， $t_{i1}$  與  $t_{i2}$ ；再依時角關係式即可獲得兩點的經度， $\lambda_{i1}$  與  $\lambda_{i2}$ 。其相關公式如下：

$$\cos(t_{i1}) = \frac{\cos Hi - \sin(aL_{i1})\sin di}{\cos(aL_{i1})\cos di}, \quad i = 1, 2; \quad (3a)$$

$$\cos(t_{i2}) = \frac{\cos Hi - \sin(aL_{i2})\sin di}{\cos(aL_{i2})\cos di}, \quad i = 1, 2; \quad (3b)$$

$$\lambda_{i1} = Gi \mp t_{i1}, \quad \lambda_{i2} = Gi \mp t_{i2}. \quad (3c)$$

### 4. 割線方程組及代數解

以天體  $i$  為例，其割線上的兩點，即  $P_{i1}(aL_{i1}, \lambda_{i1})$  與  $P_{i2}(aL_{i2}, \lambda_{i2})$ ，如圖 1 示，再轉換至直角座標系統如圖 2 示，即  $P_1(x_1, y_1)$  和  $P_2(x_2, y_2)$ ，至此，割線方程組及其代數解可輕易地建構，而兩割線的交點就是天文船位(AVP)，其經緯度分別為  $\lambda_{AVP}$  和  $L_{AVP}$ 。推導過程如下：

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad (4a)$$

$$\Delta x_i(y - y_1) = \Delta y_i(x - x_1), \quad (4b)$$

則割線方程組的一般式如下：

$$(\Delta y_i)x - (\Delta x_i)y = x_1(\Delta y_i) - y_1(\Delta x_i), \quad i = 1, 2. \quad (4c)$$

若常數項規定為

$$A = x_1(\Delta y_1) - y_1(\Delta x_1), \quad B = x_1(\Delta y_2) - y_1(\Delta x_2), \quad (4d)$$

再依 Cramer 法則，即可獲得解集合。相關公式如下：

$$D = \begin{vmatrix} \Delta y_1 & -\Delta x_1 \\ \Delta y_2 & -\Delta x_2 \end{vmatrix} = \Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1, \quad (5a)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} A & -\Delta x_1 \\ B & -\Delta x_2 \end{vmatrix} = (\Delta x_1)B - (\Delta x_2)A, \quad (5b)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \Delta y_1 & A \\ \Delta y_2 & B \end{vmatrix} = (\Delta y_1)B - (\Delta y_2)A, \quad (5c)$$

$$\lambda_{AVP} = x = \frac{D_x}{D}, \quad L_{AVP} = y = \frac{D_y}{D}. \quad (6)$$

## 5. 算術平均數及標準差

多天體天文船位是雙天體天文船位的延伸，故以統計學的「算術平均數及其標準差」來表示「多天體天文船位及其誤差範圍」(AVP-ER)。在直角座標系統，若天體數  $i(1-n)$ ，則天文船位數量  $j(1-m)$ ，即  $j=C_2^i$ 。又計算求得各天體船位，即  $(x_j, y_j)$ ，那麼  $m$  個天文船位的算術平均數及其標準差即可求得，再反變換為天文船位，其經緯度分別是  $\lambda_{AVP}$  和  $L_{AVP}$ 。相關公式如下：

$$\lambda_{AVP} = \bar{x} = \frac{\sum x_j}{m}; \quad L_{AVP} = \bar{y} = \frac{\sum y_j}{m}; \quad (7a)$$

$$ER = \frac{\sum \sqrt{(x_j - \bar{x})^2 + (y_j - \bar{y})^2}}{m}. \quad (7b)$$

## 2.2 計算程序

### 1. 雙天體計算程序

割線方程組求解雙天體天文船位的計算程序(步驟 1 至步驟 5)，如下述：

#### 步驟 1：航進定位概念

使用平均緯度航法分別對參考點移動至定位時間；即採用式(1a)、(1b)及(1c)等。

### 步驟 2：決定初始邊界

依適應邊界技巧決定初始邊界， $[aL_{i1}, aL_{i2}]$ ；即採用式(2a)、(2b)及(2c)等。

### 步驟 3：定位時間的割線上兩點

使用球三的邊餘弦律及時角關係式，分別計算求得在等高圈的割線上兩點；即採用式(3a)、(3b)及(3c)等。

### 步驟 4：定位時間的天文船位

採用割線方程組及其代數解，即可求得天文船位；式(4a)、(4b)、(4c)、(4d)、(5a)、(5b)、(5c)及(6)等。

### 步驟 5：迭代機制之應用

迭代 1 就是步驟 2；迭代 2 係以天文船位的緯度( $L_{AVP}$ )取代原先的推算船位緯度( $L_{DR}$ )，再使用縮減適應邊界，即式(2d)，重複步驟 2 至步驟 4，直至迭代前後的數值相同，即求得真實的雙天體天文船位。

## 2. 多天體計算程序

割線方程組求解多天體天文船位的計算程序(步驟 0 至步驟 6)；如下述：

### 步驟 0：m 個天文船位

依天體個數，任取兩個天體計算，求得雙天體天文船位；n 個天體可獲得  $m=C_2^1$  個天文船位。

### 步驟 1 至步驟 5：

多天體計算程序的步驟 1 至步驟 5，係與雙天體計算程序的步驟 1 至 5 完全相同。

### 步驟 6：天文船位及其誤差

使用算術平均數及其標準差分別代表多天體天文船位及其誤差範圍(AVP-ER)；式(7a)及(7b)等。

## 參、實例驗證及討論

本論文依照前一章方法論暨計算程序，使用 C# 程式語言成功地開發出應用程式，命名為 nAVP\_SLE。本章將以三個實例來驗證本論文所提出的方法論以及程式的正確性；例題 1 為航行中求解雙天體天文船位；例題 2 是三天體天文船位，其結果展示天文船位及其誤差範圍(AVP-ER)；例題 3 則是四天體天文船位，將展現本程式所呈現的天文船位的散佈圖，作為航行員的預判機制。

表 3. 例題 1 計算船位所需之相關資訊

Celestial body	Alkaid	Capella
DR	ZT 2004, 41°34.8'N, 017°00.5'W	
ZT	20-02-56	20-03-58
Ho	77°34.9'	15°19.3'
GHA	003°14.2'	131°24.8'
Dec	49°25.7'N	45°58.4'N

資料來源：[13, pp 332-333]

### 例題 1：雙天體天文船位

某船舶在 ZT 2004 的推算船位(DR)， $L41^{\circ}34.8'N$ ,  $\lambda017^{\circ}00.5'W$ ，船舶的航向  $288^{\circ}$ ，航速 6.8 節。若航行員於 ZT 20-03-58 使用六分儀觀測 Capella，又於 20-02-56 觀測 Alkaid，茲將計算雙天體天文船位所需的相關資訊，彙整為表 3，則天文船位為何？[13]

**求解：**操作程式 nAVP\_SLE 求解在 ZT 20-03-58 的雙天體天文船位。

### 結果：

1. 程式 nAVP\_SLE 的操作面板如圖 3 所示，上方為各天體觀測資訊的輸入欄位，左下方是船舶航行資訊的輸入欄位，右下方則是計算獲得的天文船位之輸出。若再點選右下方的 Draw，則出現天文船位的展示海圖與天文船位的經緯度，如圖 4 所示；若為多天體，則會呈現天文船位的散佈海圖提供預判以及 m 個天文船位資訊以為參考。
2. 如圖 4 所示，雙天體天文船位為  $L41^{\circ}39.09822'N$ ,  $\lambda017^{\circ}07.3687'W$ 。若採用「四捨五入」技巧，則是  $[L41^{\circ}39.1'N, \lambda017^{\circ}07.4'W]$ 。

### 討論：

1.  $[L41^{\circ}39.1'N, \lambda017^{\circ}07.3'W]$ 與  $[L41^{\circ}39.1'N, \lambda017^{\circ}07.4'W]$ 係為相關論文的天文船位，前者的論文[24-26, 39-40, 48]，後者則有[27, 36]；兩者在經度的差異小於 0.1'，符合航海的要求。事實上，導致該誤差的原因係是截尾誤差(rounding error) [10-12, 24-26]。
2. 海圖作業所獲得天文船位，其過程繁複且其經緯度必須自行讀出，如圖 5 所示[13]；本論文自行開發的程式 nAVP\_SLE 具有快速且準確地求解天文船位的優點。



圖 3. 例題 1 執行 nAVP\_SLE 展示結果(面板一)

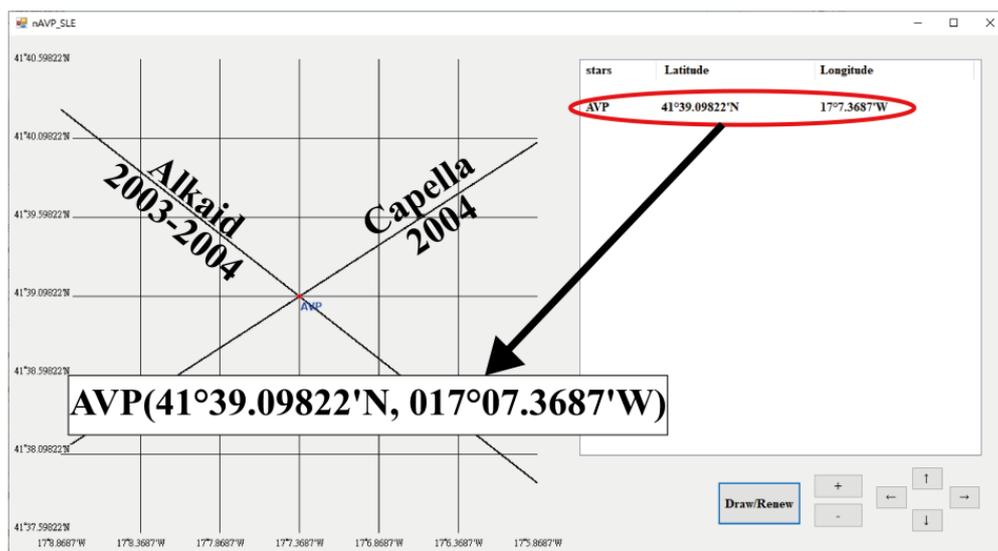


圖 4. 例題 1 執行 nAVP\_SLE 展示結果(面板二)

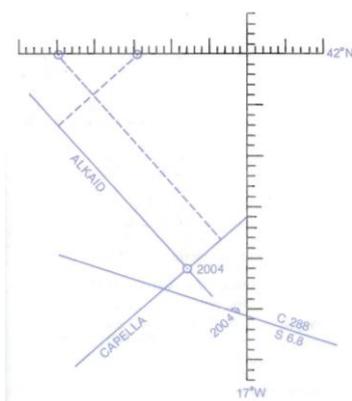


圖 5. 海圖作業[13]

表 4. 例題 2 計算船位所需之相關資訊

Celestial body	Deneb	Antares	Vega
DR	ZT 0616, 45°10.0'N, 030°15.0'W		
ZT	06-09-04	06-12-05	06-16-02
Ho	46°35.6'	18°46.9'	66°48.7'
GHA	327°11.5'	031°07.6'	000°03.4'
Dec	45°10.9'N	26°22.5'S	38°45.2'N

資料來源：[49, p 29]

### 例題 2：三天體天文船位

某船舶在 ZT 0616，DR L45°10.0'N, λ030°15.0'W，船舶的航向 180°，航速 20 節。若航行員以六分儀分別觀測三星體，即 Deneb、Antares 與 Vega 等，茲將計算三天體天文船位所需的相關資訊整理於表 4，則天文船位為何？[49]

求解：操作程式 nAVP\_SLE 求解在 ZT06-16-00 的三天體天文船位及其誤差範圍。

### 結果：

1. 執行 nAVP\_SLE 程式後，再點選 Draw，則有天文船位的散佈海圖以及 3 個天文船位資訊；三條割線 LOP 或稱“Sumner line”會產生誤差三角形(cocked hat)，其三個頂點分別為(L44°49.04104'N, λ030°16.65329'W)、(L44°49.13527'N, λ030°16.71201'W) 及(L44°49.03579' N, λ030°16.72326' W)，如圖 6 所示。
2. [L44°49.0707' N, λ030°16.69618' W]及 0.0542716556401196 nm 分別是三天體天文船位(AVP)及其誤差範圍(ER)。

### 討論：

1. 圖 7a 示，三天體天文船位在海圖上的呈現為一點；然圖 7b 示，執行 nAVP\_SLE 的結果，三個天文船位則形成誤差三角形，此驗證本文自行開發的程式具有準確性。
2. 有論文[50]認為，若割線 LOP 接近緯度線時，則無法處理；然而本論文依循方法論及其計算程序所撰寫的 nAVP\_SLE 程式，卻證明本論文的方法論具有廣泛的適用性。
3. 從表 2 知，使用本研究室郭倍宏碩士論文[27]的 nAVP\_PSO 執行例題 2，由於其目標函數係為最小的截距之標準差，限制式則是各天體高度方程群，結果顯示，三天體天文船位及其誤差範圍分別是 [L44°49.46458'N, λ030°15.48982'W] 及 0.756941061695384 nm，天文船位(AVP)最接近三角形的內心，至於本論文係以算術平均數及其標準差分別代表三天體天文船位及其誤差範圍，而結果顯示在[結果 2]，天文船位就是三角形的重心；誤差 0.05427nm 小於最小的截距之標準差 0.75694。

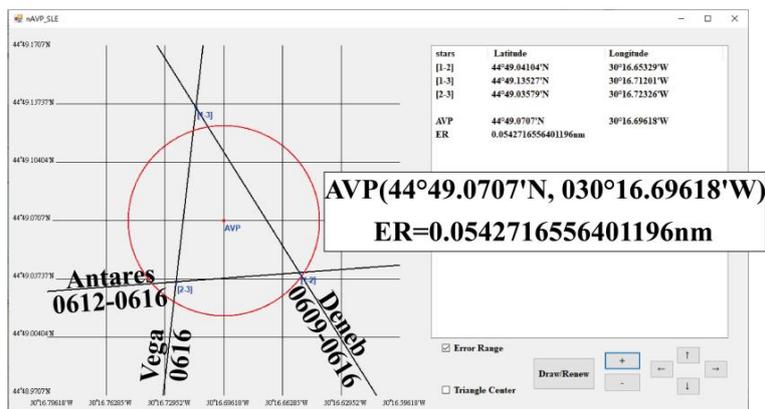
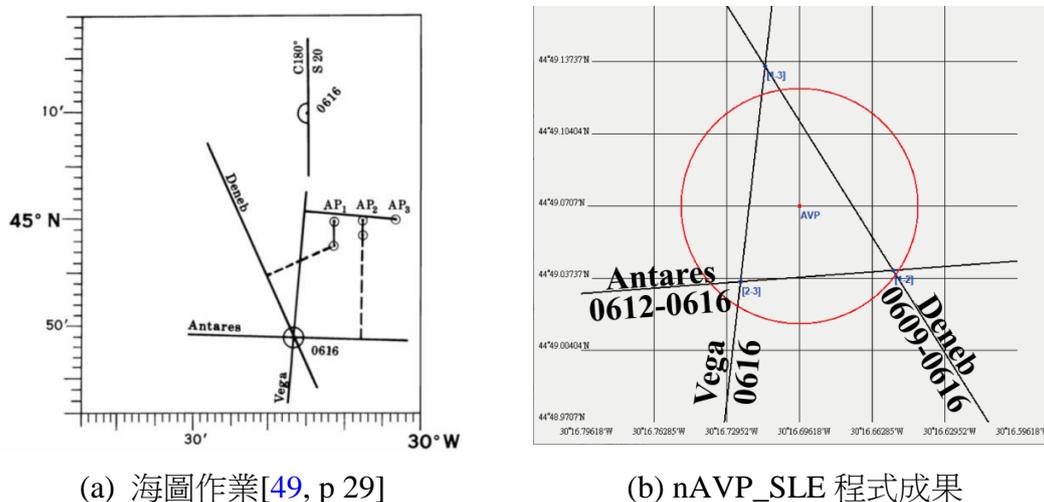


圖 6. 例題 2 執行 nAVP\_SLE 展示結果



(a) 海圖作業[49, p 29]

(b) nAVP\_SLE 程式成果

圖 7. 例題 2 圖示結果之比較

### 例題 3：四天體天文船位

某船舶在 ZT 1812，DR 35°00.0'S，λ005°00.0'E，船舶的航向 220°，航速 20 節。若航行員以六分儀分別觀測四星體，Altair、Fomalhaut、Achernar 與 Rasalhague 等，茲將求解四天體天文船位所需的相關資訊彙集至表 5，則天文船位為何？[47]

求解：操作程式 nAVP\_SLE 求解在 ZT18-12-00 的四天體天文船位及其誤差範圍。

### 結果：

1. 四個天體可得 6 個天文船位。執行 nAVP\_SLE 程式後，再點選 Draw，則有天文船位的散佈海圖以及 6 個天文船位資訊。四天體天文船位(AVP)及其誤差範圍(ER)分別是(L35°18.63208'S，λ005°26.93954' E)及 0.27381064827554 nm，如圖 8 所示。

表 5. 例題 3 計算船位所需之相關資訊

Celestial body	Altair	Fomalhaut	Achernar	Rasalhague
DR	ZT 1812, 35°00.0'S, 005°00.0'E			
ZT	18-00-00	18-04-00	18-08-00	18-12-00
Ho	37°53.0'	27°54.0'	17°46.5'	41°35.5'
GHA	325°06.6'	279°24.2'	240°21.7'	002°04.8'
Dec	08°51.4'N	29°39.1'S	57°15.8'S	12°34.1'N

資料來源：[47]

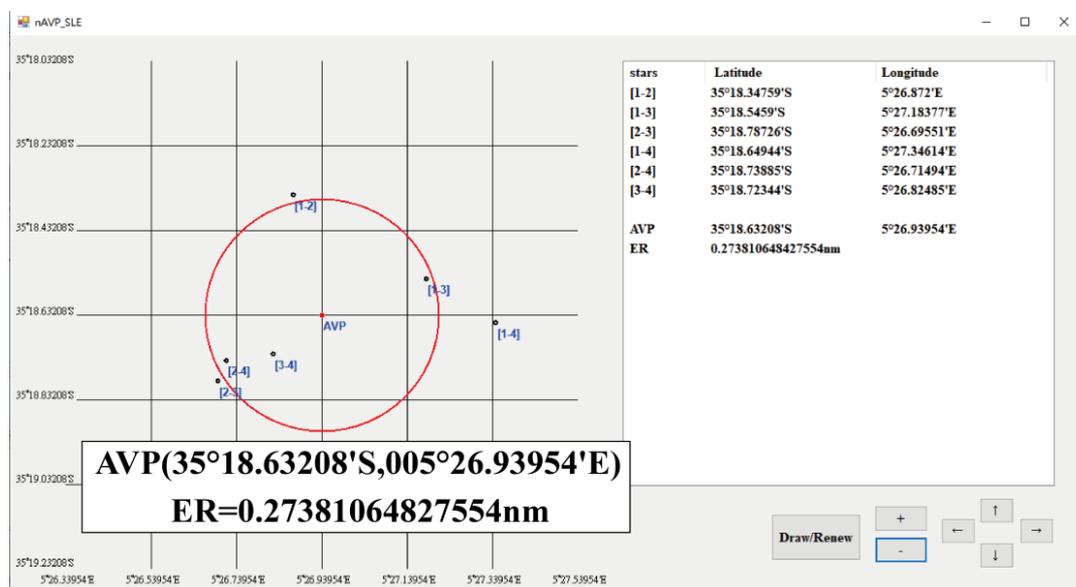
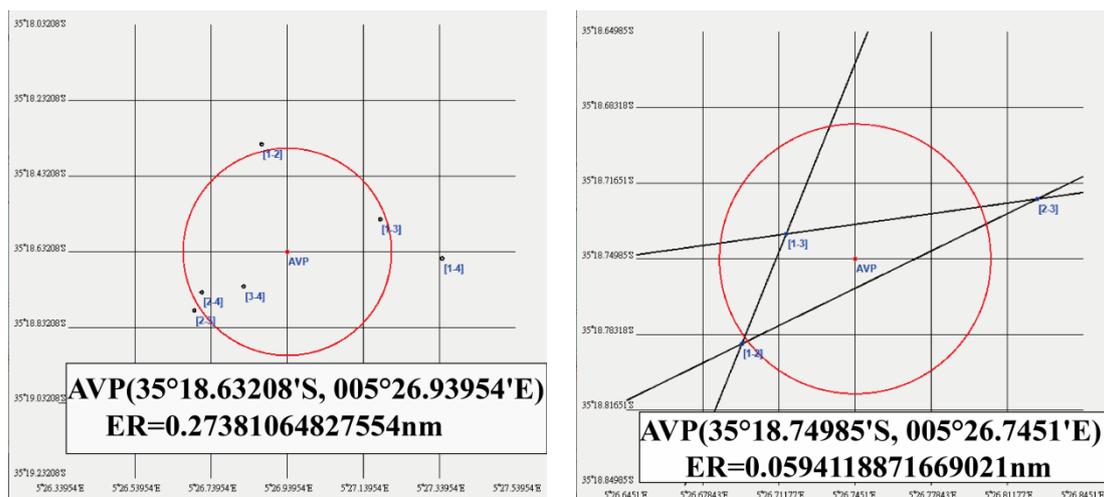


圖 8. 例題 3 執行 nAVP\_SLE 展示結果



(a) 四天體 6 個天文船位

(b) 三天體 3 個天文船位

圖 9. 例題 3 的圖示結果之比較

2. 由圖 8 的散佈圖發現天體 1(Altair)係有偏誤(bias)現象，故將其刪除；再重新執行 nAVP\_SLE 程式。圖 9a 及圖 9b 分別表示四天體 6 個天文船位以及三天體 3 個天文船位的散佈圖，其中三天體天文船位及其誤差範圍則分別為(L35°18.74985'S, λ005°26.7451'E)及 0.0594118871669021 nm。

### 討論：

為符合實際天文觀測作業，nAVP\_SLE 程式中設計了多天體天文船位的散佈圖，該散佈圖不僅可提供予航行員亦可作為 AVP-ER 的判定等依據。以例題 3 的圖 9 為例，當刪除具有偏誤的天體時，誤差由 0.27381 nm 降至 0.05941 nm。

## 肆、結論

美國商船船長薩姆納(Thomas Hubbard Sumner, 1807-1876)，在 19 歲畢業於美國哈佛大學(Harvard University)天文暨數學學系，並於 30 歲即提出“Sumner line”，該「以直逼曲」的創意開啟了實用航海學的新時代[7-10]，故其本質就是試誤法(trial-and-error)。本論文重新審視其貢獻，從幾何學觀點，發現其就是等高圈的割線 LOP，繼而以此建構割線方程組(SLE)，去求解雙天體天文船位問題，進而延伸求解多天體天文船位問題。1970 年起，引進計算科技於天文航海學，從表 1 與表 2 可知，大多數學者偏好求解「聯立曲線方程組(COPs)」，然而本論文則是堅信「簡單是美」並反向思考，即求解「聯立直線方程組(LOPs)」。結論可歸納如下：

1. 本論文的方法論，內容有配合航進定位概念的平均緯度航法、確保可獲得割線在等高圈的兩點的適應邊界技巧、從代數構建割線方程組及其代數解、「沿曲求真和不變為真」的迭代機制以及統計學的算術平均數及其標準差等，據此，建立雙天體及多天體的天文船位之計算程序。
2. 依循方法論及其計算程序，本論文使用 C#程式語言成功地開發出應用程式，並命名為 nAVP\_SLE，進而使用三個標準實例(benchmark)來驗證所構建方法論的準確性與其廣泛的適用性。
3. 本論文自行開發的程式 nAVP\_SLE，其面板簡單且容易操作；而求解多天體天文船位時，則設計了天文船位的散佈圖，其不僅可供航海人員參考，亦可作為天文船位及其誤差範圍的判定依據。

最後，謹以本論文的學術成果，對航海前輩，美國商船船長薩姆納致上最高的敬意，並感恩地享受其有創意的智慧。

## 參考文獻

1. Lützhöft, M. H. and Dekker, S. W., 2002, "On your watch: Automation on the Bridge," *Journal of Navigation*, 55(1): 83-96.
2. Carroll, J. V., 2003, "Vulnerability Assessment of the U.S. Transportation Infrastructure That Relies on the Global Positioning System," *Journal of Navigation*, 56(2): 185-194.
3. Schager, B., 2008, "When Technology Leads Us Astray: A Broadened View of Human Error," *Journal of Navigation*, 61(1): 63-70.
4. National Transportation Safety Board (NTSB), 1995, *Marine Accident Report, Grounding of the Panamanian Passenger Ship Royal Majesty on Rose and Crown Shoal near Nantucket (NTSB/MAR-97/01)*, Massachusetts, Washington.
5. IMO, 2010, *1978 International Convention on Standards of Training Certification and Watchkeeping for Seafarers (STCW 78/95/10)*, Amended in 2010.
6. Weinberg, S. (戴守煌 譯), 2015, 「給科學家的四則金玉良言」, *數理人文*, 第4期, 頁 82-84。
7. Richardson, R. S., 1946, "Captain Thomas Hubbard Sumner 1807-1876," *NAVIGATION*, 1(2): 35-40.
8. Oestmann, G., 2011, "Delayed progress in navigation: the introduction of line of position navigation in Germany and Austria," *International Journal on Geomatics*, 1(2): 133-143.
9. Vanvaerenbergh, M., 2003, *Line of Position Navigation: Sumner and Saint Hilaire the Two Pillars of Modern Celestial Navigation*, Replica Books.
10. Bowditch, N., 1984, *American Practical Navigator*, 1984 ed., DMAH/TC.
11. Bowditch, N., 2002, *The American Practical Navigator (Pub. No. 9)*, Bicentennial ed., National Imagery and Mapping Agency (NIMA).
12. Bowditch, N., 2017, *American Practical Navigator (Pub. No. 9)*, 2017 Edition, National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), Springfield, Virginia, USA.
13. Cutler, T. J., 2003, *Dutton's Nautical Navigation*, 15th ed., Annapolis: Naval Institute Press.
14. Royal Navy, 2011, *Admiralty manual of navigation: Astro Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
15. 薩師洪, 1997, *航海學 第二部天文航海*, 文笙書局。
16. 周和平, 2013, *天文航海學*, 倫悅企業公司。
17. 錢懷源、朱乾, 2000, *航海學*, 交通部航行員訓練叢書, 幼獅文化事業公司。
18. 陳志立、徐國裕, 2015, *航海與船舶操縱訓練教材*, 海洋大學航訓中心。

19. Von Bertalanffy, L., 1952, *Problems of life: an evaluation of modern biological thought*, Watts, London.
20. Flynn, R. W., 1972, "Computer Sight Reduction Based on Intersection of Equal Altitude Circles," *NAVIGATION*, 19(1): 7-10.
21. Fox, C., 1975, "Finding Latitude and Longitude by Calculators," *NAVIGATION*, 22(4): 293-301.
22. Ogilvie, R. E., 1977, "A New Method of Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 24(1): 67-71.
23. Van Allen, J. A., 1981, "An Analytical Solution of the Two Star Sight Problem of Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 28(1): 40-43.
24. Chen, C. L., 2003, *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei.
25. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R.\*, 2003, "A Novel Approach to Determine the Astronomical Vessel Position," *Journal of Marine Science and Technology*, 11 (4): 221-235.
26. Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R.\*, 2005, "New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position," *Journal of Navigation*, 58 (2): 315-335.
27. 郭倍宏, 2017, **粒子群演算法求解多天體的天文定位**, 碩士論文, 國立臺灣海洋大學商船學系。(陳志立為指導教授)
28. Dozier, C. T., 1949, "A Simultaneous Two-Star Fix," *NAVIGATION*, 2(4): 91-92.
29. Kotlaric, S., 1971, "New Short Method Table (K11) for Direct Finding of a Two Star Fix without Use of Altitude Difference Method," *NAVIGATION*, 18(4): 440-449.
30. Kotlaric, S., 1981, "K-12 Method By Calculator: A Single Program for All Celestial Fixes, Directly or by Position Lines," *NAVIGATION*, 28(1): 44-51.
31. A'Hearn, M. F. and Rossano, G. S., 1977, "Two Body Fixes by Calculator," *NAVIGATION*, 24(1):59-66.
32. Bennett, G. G., 1979, "General Convention and Solutions- Their Use in Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 26(4): 275-280.
33. Chiesa, A. and Chiesa, R., 1990, "A Mathematical Method of obtaining an Astronomical Vessel Position," *Journal of Navigation*, 43(1): 125-129.
34. Pepperday, M., 1992, "The Two-Body Problem At Sea," *Journal of Navigation*, 45(1): 138-142.
35. Gery, S. W., 1997, "The Direct Fix of Latitude and Longitude from Two Observed Altitudes," *NAVIGATION*, 44(1): 15-23.

36. 龔韋婷，2014，天文定位的計算方法，碩士論文，國立臺灣海洋大學商船學系。(陳志立為指導教授)
37. Wight, C., 1976, "Direct Methods of Latitude and Longitude Determination by Mini-Computer," *NAVIGATION*, 23(2):149-156.
38. Chen, C. L.\*, Hsu, T. P. and Weng, G. Y., 2014, "New Computational Approaches to Determine the Astronomical Vessel Position Based on the Sumner Line," *Polish Maritime Research*, 21-4(84): 3-11.
39. Hsu, T. P., Weng, G. Y., and Chen, C. L.\*, 2017, "A Modified Sumner Method for Obtaining the Astronomical Vessel Position," *Journal of Marine Science and Technology*, 25(3): 319-328.
40. 翁國祐，2017，基於 **Sumner** 位置線概念的天文定位求解方法，博士論文，國立臺灣大學土木工程學系。
41. 陳志立\*、龔韋婷、徐嫚謙，2016，「求解天文船位方法的創意與啟發」，*台灣海事安全與保安研究學刊*，7(1): 1-18。
42. DeWIT, C., 1974, "Optimal Estimation of a Multi-Star Fix," *NAVIGATION*, 21(4): 320-325.
43. Severance, R. W., 1989, "Overdetermined Celestial Fix by Iteration," *NAVIGATION*, 36(4): 373-378.
44. Metcalf, T. R. and Metcalf, F. T., 1991, "On the Overdetermined Celestial Fix," *NAVIGATION*, 38(1): 79-89.
45. Kaplan, G. H., 1995. "Determining the Position and Motion of a Vessel from Celestial Observations," *NAVIGATION*, 42(4): 631-648.
46. Tsou, M. C., 2012, "Genetic Algorithm for Solving Celestial Navigation Fix Problems," *Polish Maritime Research*, 19(3): 53-59.
47. Tsou, M. C., 2015, "Celestial Navigation Fix Based on Particle Swarm Optimization," *Polish Maritime Research*, 22(3): 20-27.
48. Chen, C.L.\* and Hsieh, T.H., 2011, "Computation Programs of the Astronomical Vessel Position," *Journal of Marine Science and Technology*, 19(1):35-42.
49. National Imagery and Mapping Agency (NIMA), 2000, *Sight Reduction Tables for Marine Navigation (Pub. No. 229)*, Vol. 3 (Latitudes 30°-45°), Washington.
50. Gradsztajn, E., 1979, "A New Method for Plotting the Position Line: The Golem Solution," *NAVIGATION*, 26(1): 70-77.