

基於天子午線平面求解大圈航路的方法

An Approach for Solving the Great Circle Track Based on Plane of Celestial Meridian

陳志立*、劉繽方**、簡鈺峰***

摘要

對球面三角學之應用言之，地文球面三角與天文球面三角是相同。本文的方法係基於天文航海學中天子午線平面的思維，分別以地球的赤道座標系統和大圈航路之起航點的水平座標系統來決定大圈航路上的轉向點位置；繼而，經比較可得球面三角公式；進而，引進變數變換或代數運算，並對大圈航路的不同情況，推導出其適應的控制方程式。最後，以實際例題展示本文所提出的方法。

關鍵詞：大圈航路、地文球面三角、天文球面三角、天子午線平面。

ABSTRACT

The terrestrial spherical triangle is the same as the celestial spherical triangle for application in spherical trigonometry. An approach, based on an idea of the plane of celestial meridian in celestial navigation, is proposed to determine the waypoints, which are presented in the equator coordinates system (ES) of the Earth and the horizon coordinates system (HS) of the departure point on the great circle track (GCT), respectively. Thus, the spherical triangle formulae can be obtained by a comparison. Furthermore, the algebraic operation or variables transformation are introduced to derive the adaptive governing equations with respect to

* 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系副教授，國立臺灣大學工學博士。

E-mail: clchen@mail.ntou.edu.tw

** 劉繽方 Pin-Fang Liu，國立臺灣海洋大學商船學系碩士。

*** 簡鈺峰 Yu-Fong Jian，國立臺灣海洋大學商船學系學生。

different conditions of the GCT. Finally, a practical example is demonstrated for the proposed approach.

Key words: Great circle track, Terrestrial spherical triangle, Celestial spherical triangle, Plane of celestial meridian.

壹、緒論

柏拉圖 (Plato, ca. 427-347 BC) 對知識探究的目標，不是眼可見、身可感的暫態及變化的本質；在真實的世界裡，雖然近似圓形的東西俯拾皆是，卻找不到任何標準的圓；然而在其所謂「理型世界」(world of the forms) 之中，一個幾何圓，遠比任何近似圓形的物件要「真實」得多[1]。同樣地，地球每一時刻都在改變形狀，即約有 1/300 的橢率[2]，但是數學上的球形總是完美無缺，永遠不變。在此理念下，假設地球為球形；據此，當船舶橫跨大洋航行時，且未考量風及流的影響下，地球表面上任意兩點的最短路徑即為大圈航路 (great circle track, GCT) [3]。實務作業上，大圈航路為分段的恆向線 (rhumb lines) 航路，故其主要工作在求得大圈航路上的各轉向點位置[4-9]。

由於大圈弧線上頂點處航向角為 90° ，所以海事教育或訓練的慣用計算程序 (conventional computation procedure)，係以頂點 (vertex, V) 為參考點 (reference point)，再應用直角球三的納皮爾法則 (Napier's rules) 輾轉求得大圈航路上各轉向點，據此，該計算公式之推導係採用「球面三角學」(spherical trigonometry, ST)，而該程序則歸類為“RP-V”[4-9]；而學理上，大圈弧線上過赤道點 (equator crossing point, E) 的決定比頂點來得容易，應用極對偶定理 (polar duality theorem, PDT)，將多數個直角球三均轉變為象限球三，再應用象限球三的納皮爾法則輾轉求得各轉向點，由於採用極對偶定理，故可謂為對偶計算程序 (dual computation procedure) 並歸類為“RP-E”[9-10]。前述兩者皆屬於間接計算法，相對之，若以起航點 (departure point, F) 為參考點，直接推導公式，則歸類為“RP-F”，可稱為直接計算法；其數學方法概分為二，一為向量代數 (vector algebra, VA)，另一則是向量基底 (vector basis, VB)；前者因同時具有幾何定義與代數結果，可直接針對問題推導計算公式[9-11]；而後者則是尋找歸一正交向量基底 (orthonormal vector basis)，再使用線性組合 (linear combination)，準此，其關鍵在於幾何分析，然而其幾何推論過程複雜繁瑣[12-14]，此引發本文的起始動機。

事實上，靈感來自天文球三變換至地文球三[15]，即將天球的天子午線平面圖投射至 (或縮小為) 地球的子午線平面圖，由於該圖同時擁有赤道系統與水平系統等兩組的歸一正交向量基底，如此可依「立體平面化」思維，以簡易的幾何分析，獲得大圈航路上之轉向點的線性組合，進而，比較各個基底的分量，求得各球面三角公式 (簡稱球三公式)；最後，針對大圈航路之各種問題，以變數變換或代數運算，推導出其適應的控

制方程式，相較於相關論文[12-14]，其分析及推論過程淺顯易懂，此即為本文的主要目的。

除緒論外，後續章節安排如下：第二章說明天文航海學中天子午線平面圖的思維，並聚焦在地球的子午線平面圖；第三章採用變數變換或代數運算，推導出控制方程式；第四章為實際例題展示；最後，結論則臚列於第五章。

貳、天子午線平面圖之構思

首先說明天球的天子午線平面圖與地球的子午線平面圖之關係，並聚焦在子午線平面圖；繼而分別以赤道系統與水平系統的歸一正交向量基底（orthonormal vector basis）表示大圈航路上之轉向點位置；進而比較各個基底的分量，可得各球三公式，且以球面三角學評析之，以為下一章之預備。

2.1 天子午線平面圖與子午線平面圖

地球座標系統係以緯度（latitude, L ）與經度（longitude, λ ）表示船舶（或觀測者）位置。在天文航海學，為表示天體位置，將地球座標系統擴大至天球上，即為天赤道座標系統，以赤緯（declination, Dec）與時角（hour angle, HA；其依不同之基準而有 GHA, LHA 及 SHA 等）表示天體位置；另從觀測者角度，構建天水平座標系統，且以高度（altitude, H ）與方位（azimuth, Z_n ）表示天體位置；兩者自然地以「觀測者的緯度等於天極的高度」組合成天子午線平面圖，其「立體平面化」思維，可採用簡易的幾何分析，分別量測（或推導）在天赤道座標系統或天水平座標系統上天體位置（公式）。進一步說明，天體位置在兩座標系統之間的變換可透過天子午線平面圖獲得，其間的變換公式即是球三公式，而採用球三公式則可製作測天簡算表；此三者即圖解法（或載帽法）、計算法以及查表法，它們就是天文航海學的計算核心。據此，天子午線平面圖的重要性乃是「不言而喻」。

天球的天文球三投射至地球面，則是地文（或大圈）球三。如圖 1 所示，天頂（zenith, Z_e ）與天體（celestial body）分別為大圈航路上的起航點（departure point, F ）與轉向點（waypoints, X ）所取代；而船舶（或觀測者）緯度就是起航點緯度（ L_F ）；赤道座標系統以轉向點緯度（ L_X ）與 F 至 X 的經度差（ DL_{oFX} ）表示；水平座標系統則以 F 至 X 之大圈距離（ D_{FX} ）與大圈初航向角（ C ）表示；另為清晰地表示赤道座標系統與水平座標系統之關係，繪製圖 2。簡言之，上述的主要目的係將天球的天子午線平面圖投射至（或縮小為）地球的子午線平面圖並聚焦之，以利分析。

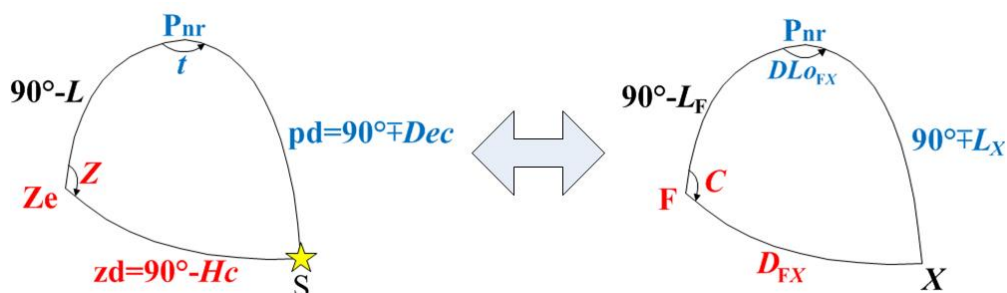


圖 1. 天文球三與地文球三之對應圖

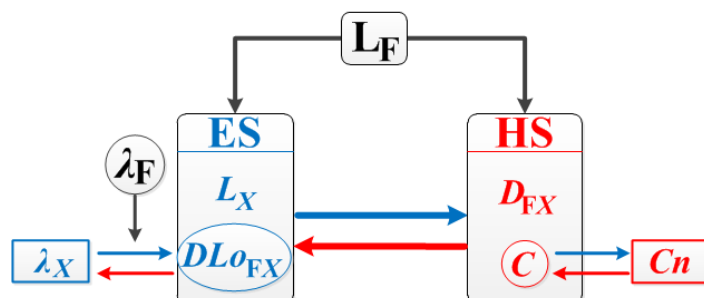


圖 2. 赤道座標系統與水平座標系統之關係

2.2 以赤道系統為主的子午線平面圖

如圖 3 所示，以赤道系統的歸一正交基底，即[**Q_P**]座標系統為基準，則大圈航路上的轉向點位置經幾何分析可得：

$$\vec{X}_E = (\cos L_X \cos DLo_{FX})\vec{Q} + (\sin L_F)\vec{P}. \quad (1)$$

另外，赤道系統的兩正交基底，分別採用水平系統的歸一正交基底表示，即以[**N_F**]座標系統為基準，經幾何分析，表示如下：

$$\vec{Q} = (-\sin L_F)\vec{N} + (\cos L_F)\vec{F}, \quad (2a)$$

$$\vec{P} = (\cos L_F)\vec{N} + (\sin L_F)\vec{F}. \quad (2b)$$

再將式(2a)與式(2b)，代入式(1)，整理後得下式：

$$\begin{aligned} \vec{X}_H = & (\cos L_F \sin L_X - \sin L_F \cos L_X \cos DLo_{FX})\vec{N} \\ & + (\sin L_F \sin L_X + \cos L_F \cos L_X \cos DLo_{FX})\vec{F}. \end{aligned} \quad (3)$$

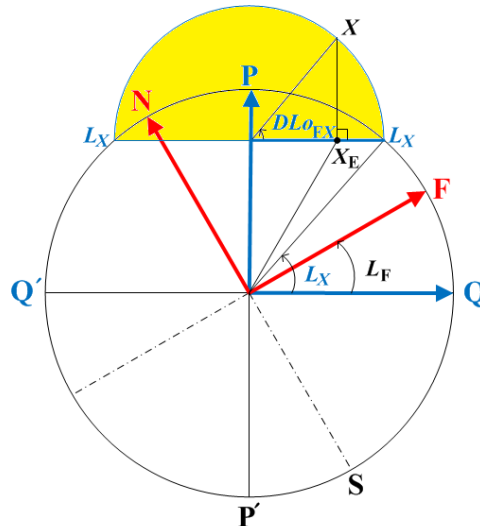


圖 3. 赤道系統為主的子午線平面圖

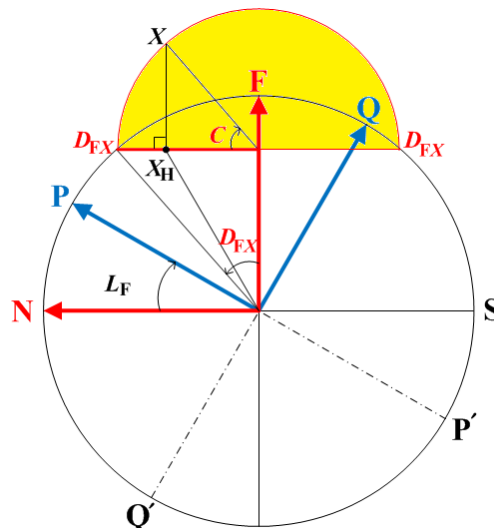


圖 4. 以水平系統為主的子午線平面圖

特別說明的是：如圖 3 所示，式(1)、式(2a)與式(2b)等，可依「立體平面化」概念，以簡易幾何直接地推論而得。若欲採用「座標旋轉」，則可如圖 3 所示，係將水平[**N**、**F**]系統，反時針旋轉 $(90^\circ - L_F)$ 至赤道[**Q**、**P**]系統，即可輕易地求得式(2a)與式(2b)；有興趣者可自行推導。

2.3 以水平系統為主的子午線平面圖

如圖 4 所示，以水平系統的歸一正交基底，即[**N**、**F**]座標系統為基準，則大圈航路上的轉向點位置經幾何分析可得：

$$\vec{X}_H = (\sin D_{FX} \cos C) \vec{N} + (\cos D_{FX}) \vec{F}. \quad (4)$$

另外，水平系統的兩正交基底，分別使用赤道系統的歸一正交基底表示，即以[**Q_P**]座標系統為基準，經幾何分析，表示如下：

$$\vec{N} = (-\sin L_F)\vec{Q} + (\cos L_F)\vec{P}, \quad (5a)$$

$$\vec{F} = (\cos L_F)\vec{Q} + (\sin L_F)\vec{P}. \quad (5b)$$

再將式(5a)與式(5b)，代入式(4)，整理後得下式：

$$\begin{aligned} \vec{X}_E = & (-\sin L_F \sin D_{FX} \cos C + \cos L_F \cos D_{FX})\vec{Q} \\ & + (\cos L_F \sin D_{FX} \cos C + \sin L_F \cos D_{FX})\vec{P}. \end{aligned} \quad (6)$$

同樣地，進一步說明的是：如圖 4 所示，式(4)、式(5a)與式(5b)等，是依「立體平面化」概念，以簡易幾何直接且迅速地推論而得。若欲採用「座標旋轉」，則可如圖 4 所示，係將赤道[**-Q_P**]系統，順時針旋轉(90°-L_F)至水平[**N_F**]系統，即可輕鬆地獲得式(5a)與式(5b)；有興趣者亦可自行推導。

2.4 球三公式之產生

至此，僅需比較各個系統中各個基底的分量，即可輕易獲得球三公式，分述如下：

赤道座標系統的轉向點位置，即分別比較式(1)與式(6)的兩基底的分量，可得：

$$\cos L_X \cos D_{Lo_{FX}} = -\sin L_F \sin D_{FX} \cos C + \cos L_F \cos D_{FX}, \quad (7)$$

$$\sin L_X = \cos L_F \sin D_{FX} \cos C + \sin L_F \cos D_{FX}. \quad (8)$$

而水平座標系統的轉向點位置，即分別比較式(4)與式(3)的兩基底的分量，可得：

$$\sin D_{FX} \cos C = \cos L_F \sin L_X - \sin L_F \cos L_X \cos DLo_{FX}, \quad (9)$$

$$\cos D_{FX} = \sin L_F \sin L_X + \cos L_F \cos L_X \cos DLo_{FX}. \quad (10)$$

另外，再度審視圖 3 與圖 4，可發現在小圓圈上的兩線段長度相同，即 $XX_H = XX_E$ ，亦經幾何分析，可得：

$$\sin D_{FX} \sin C = \cos L_X \sin DLo_{FX}. \quad (11)$$

從球面三角學[16-17]檢視，式(7)與式(9)皆為五部公式 (five-part formulae) 且因 5 個變數均相同，故兩式必互為等價公式；而式(8)與式(10)則皆是邊餘弦律 (side cosine law)，唯一的差別在式(8)的兩面角為大圈初航向角 (C)，而式(10)則是經度差 (DLo_{FX})；至於式(11)係是正弦律 (sine law)。

參、控制方程式之推導

首先說明大圈航路的問題，繼而僅使用式(7)到式(11)等公式，以變數變換或代數運算，針對大圈航路之各種問題，推導出其適應的控制方程式。

3.1 大圈航路問題之描述

大圈航路的問題係已知起航點 (the departure point, F) 與到達點 (the destination point, T) 位置，求解大圈的基本資訊，如大圈距離及其初航向，頂點或過赤道點等；又在實務上，大圈航路就是分段的恆向線航路，故其主要工作在求得大圈航路上的各轉向點位置。如圖 5 所示，在球三 P_NFX ，僅已知起航點緯度 (L_F) 與大圈初航向角 (C)，是不足以求解轉向點，因此需給予初始條件；如圖 2 及圖 5 所示，經理論分析則有三種情況：即(1)給大圈距離 (D_{FX}) 求轉向點的經緯度 (L_X, λ_X)；(2)給轉向點經度 (λ_X) 求其緯度 (L_X)；(3)給轉向點緯度 (L_X) 求其經度 (λ_X)。

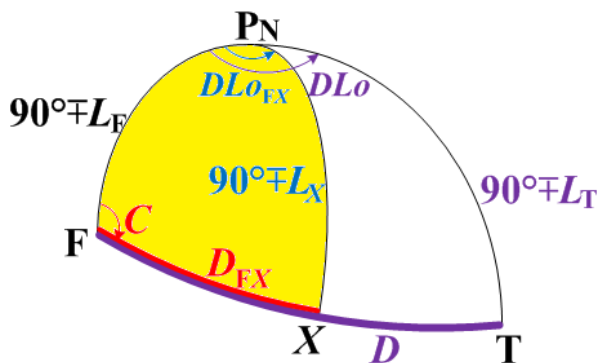


圖 5. 大圈航路問題之示意圖

3.2 控制方程式之推導

1. 大圈距離

對式(10)，採用變數變換，即以到達點 (T) 取代轉向點 (X)，可得：

$$\cos D = \sin L_F \sin L_T + \cos L_F \cos L_T \cos DLo. \quad (12)$$

2. 大圈初航向角

對式(8)，同樣地採用變數變換，即以到達點 (T) 取代轉向點 (X)，可得：

$$\cos C = \frac{\sin L_T - \sin L_F \cos D}{\cos L_F \sin D}. \quad (13)$$

3. 轉向點

- 初始條件 1：給大圈距離求轉向點的經緯度

本文係以地球的子午線平面圖分析大圈航路上的轉向點位置，故求解轉向點緯度及經度的公式分別為式(8)與式(10)，整理如下：

$$\sin L_X = \sin L_F \cos D_{FX} + \cos L_F \sin D_{FX} \cos C, \quad (14)$$

$$\cos DLo_{FX} = \frac{\cos D_{FX} - \sin L_F \sin L_X}{\cos L_F \cos L_X}. \quad (15)$$

● 初始條件 2：給轉向點經度求其緯度

採用代數運算，途徑有二：一為式(11)代入式(9)，另一則是將式(10)與式(11)代入式(7)；之後設法刪除 D_{FX} ，即可得：

$$\tan L_X = \left(\frac{1}{\cos L_F \tan C} \right) \sin DLo_{FX} + (\tan L_F) \cos DLo_{FX}. \quad (16)$$

值得注意的是，在初始條件 2 的情況，若僅已知起航點與到達點位置，且欲不需預先計算大圈初航向角下，是否依然能找到求解轉向點緯度的公式？答案是肯定地，其推導過程如下述：

先對式(16)重新整理為：

$$\tan L_X \cos L_F = \cot C \sin DLo_{FX} + \sin L_F \cos DLo_{FX}. \quad (17a)$$

再對式(17a)，採用變數變換，即以到達點 (T) 取代轉向點 (X)，可得：

$$\tan L_T \cos L_F = \cot C \sin DLo + \sin L_F \cos DLo. \quad (17b)$$

將式(17b)代入式(17a)，並設法刪除 C ，並引進和角公式，整理後可得：

$$\tan L_X = \frac{\tan L_F \sin DLo_{XT} + \tan L_T \cos DLo_{FX}}{\sin DLo} \quad (18)$$

上式(18)即為著名的子午線法 (meridian method) [8]。

● 初始條件 3：給轉向點緯度求其經度

以式(16)為主，引進三角方程之求解概念，可得下列兩式：

$$\tan \alpha = \sin L_F \tan C, \quad (19a)$$

$$\sin(DLo_{FX} + \alpha) = (\cos \alpha \cos L_F \tan C) \tan L_X. \quad (19b)$$

4. 過赤道點

對式(16)作變數變換，係以過赤道點 (E) 取代轉向點 (X)；並令 $L_E = 0$ ，得：

$$\tan DLo_{FE} = -\sin L_F \tan C. \quad (20)$$

上式(20)亦可由象限球三直接推論。

5. 頂點

式(20)經球面三角學的極對偶定理 (PDT)，即由象限球三變換至直角球三，推論可得：

$$\tan DLo_{FV} = \frac{1}{\sin L_F \tan C}. \quad (21a)$$

$$\cos L_V = \cos L_F \sin C. \quad (21b)$$

3.3 控制方程式之評論

再度從球面三角學[16-17]檢視，式(12)、式(13)、式(14)與式(15)皆為邊餘弦律（side cosine law）；而式(16)、式(17a)與式(17b)均是四鄰公式（four-part formulae），至於式(18)則為複合型四鄰公式，其不僅是論文[18]裡大圈方程式法（great circle equation method, GCEM）的簡潔式，亦為英國版航海學教材[8]中子午線法（meridian method）；另外，式(19a)、式(19b)、式(20)、式(21a)與式(21b)皆可在相關論文[9-11]找到且它們都可經由不同方法或取徑（approaches）推論而得。

肆、例題展示

本文所推導的控制方程式與論文[10-11]，逐一地比對，發現皆相同，故直接取用 **GCSPRO** 程式，作為本文的例題展示。

大圈航路之實例[4, 頁 619-620]

船舶由南非 Cape Town (33°53.3'S, 018°23.1'E) [near Green Point Light]，採用大圈航路至美國 New York (40°27.1'N, 073°49.4'W) [near Ambrose Light]。

[要求]

[例題 1-1]大圈航路的基本資訊以及若自起航點開始，每隔大圈弧 300 浬 (5°)轉向，則在大圈航路上各轉向點位置為何？

[例題 1-2]大圈航路的基本資訊以及若自經度 015°E 開始，每隔相等之經度 5°轉向，直至經度 070°W 止，則在大圈航路上各轉向點位置為何？

[方法]

執行 **GCSPRO** 程式。

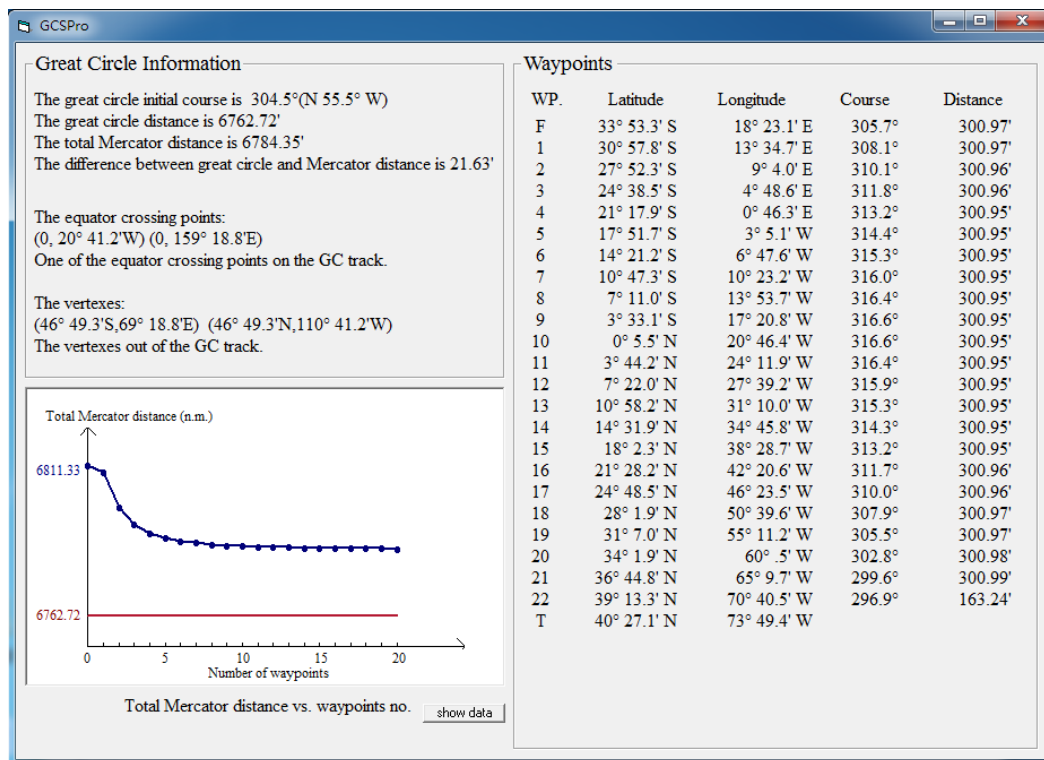


圖 6. GCSPro 程式操作結果(例題 1-1)

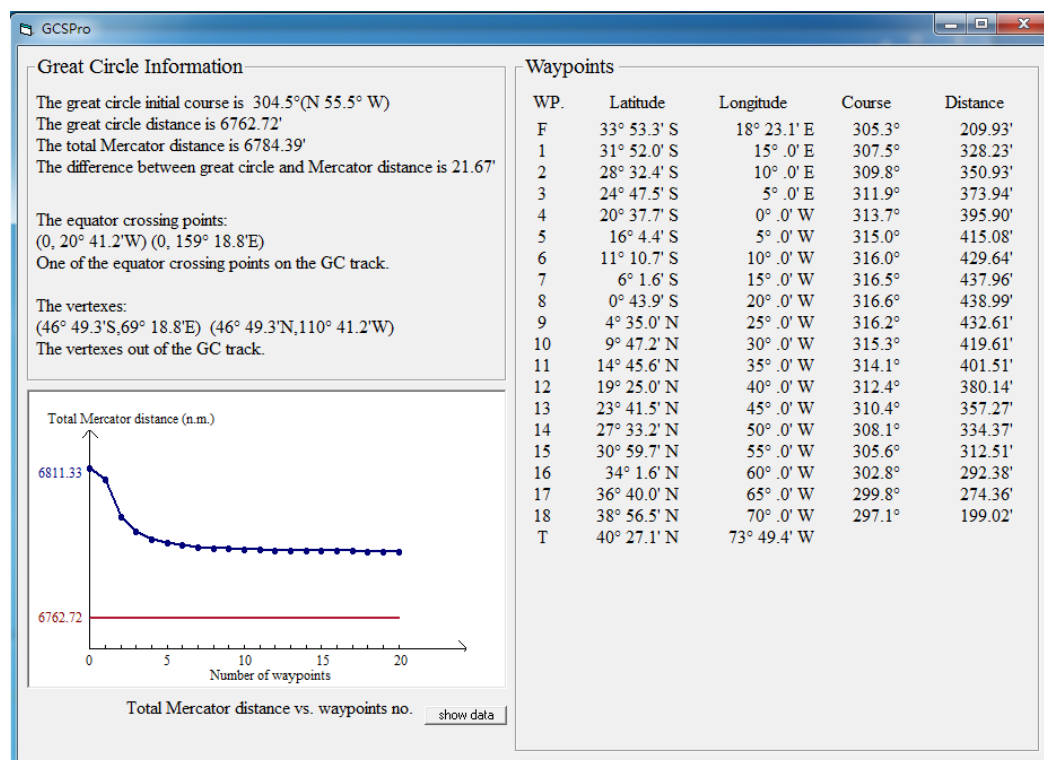


圖 7. GCSPro 程式操作結果(例題 1-2)

[結果與說明]

例題 1-1 以及例題 1-2 均採用 **GCSPRO** 程式，操作結果分別如圖 6 與圖 7 示。由於大圈航路為分段的恆向線航路，故值得一提的是：當求得大圈航路上的各轉向點位置後，相鄰兩轉向點的恆向線航路，一般而言，美國版使用球體的麥氏航法 (spherical Mercator sailing) [6, 8, 10, 19]，而英國版則採用類球體的恆向線航法 (spheroidal rhumb line sailing) [8, 14, 19, 20]；兩者的航向角計算公式是相同的，然而計算距離的公式則有所不同，前者依然使用漸長比數 (meridional parts) [6, 8]，後者則採用子午線弧長 (meridional arc length) [8, 20]；經論文[21]比較，兩者的距離差量在總距離的 0.5% 內，都符合航海實務的要求。就本例題 1-1 與論文[14]的例題 3-1 相較，大圈距離皆是 6762.72 浬，而麥氏航法及恆向線航法的總距離分別為 6784.35 浬與 6786.84 浬，兩者的距離差量小於 3 浬。

伍、結論

本文運用天文航海學中天球的天子午線平面圖的思維，將該圖投射至 (或縮小為) 地球的子午線平面圖並聚焦之；繼而以赤道系統與水平系統等兩組的歸一正交向量基底分別表示大圈航路上之轉向點位置；進而比較各個基底的分量，獲得各球三公式；再針對大圈航路之各種問題，以前述的球三公式，使用變數變換或代數運算，成功地推導出其適應的控制方程式，且這些球三公式皆從球面三角學中逐一檢視並說明，最後，則以實際例題展示大圈航路的計算結果。本文重點彙整如下：

1. 天球的天子午線平面圖係由天赤道座標系統與天水平座標系統組合而成；同樣地，地球的子午線平面圖則由赤道座標系統與水平座標系統整合為一，其中，船舶緯度就是大圈航路的起航點緯度 (L_F)；赤道系統係以轉向點緯度 (L_X) 與 F 至 X 的經度差 (DL_{oFX}) 表示；水平系統則以 F 至 X 之大圈距離 (D_{FX}) 與大圈初航向角 (C) 表示，如圖 2 與圖 5 所示。
2. 大圈航路上之各轉向點位置可採用赤道系統與水平系統兩組的歸一正交向量基底分別表示之，經比較各個基底的分量，獲得各球三公式；此幾何分析與推導過程，比起相關論文[12-14]的方法，則簡易許多。另外，對大圈航路之各種問題，使用變數變換或代數運算，成功地推導出適應的球三公式，並以球面三角學逐一評析之。

長期專注同一主題，思考過程，遠比結果，收穫更多；思維之轉折有如禪宗的人生三階段：即「見山是山；見山不是山；見山又是山。」而心境的過程中「志業、堅持、研究」則如國學大師王國維 (1877-1927) 的「三種境界」[22]：即「昨夜西風凋碧樹。

獨上高樓，望盡天涯路。」、「衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴。」、「眾里尋他千百度，驀然回首，那人卻在，燈火闌珊處。」等。

參考文獻

1. Regis, E. (邱顯正 譯), 2016, 「科學夢土」, 愛因斯坦的辦公室給了誰?, 天下文化。
2. 趙丰, 2009, 「單位計量的弔詭」, 科學人, 90: 26-27。
3. 徐正梅, 1999, 「談地球上兩點間的球面距離」, 數學傳播, 23(2): 16-23。
4. Bowditch, N., 1981, *American Practical Navigator*, 1981 ed., Defense Mapping Agency Hydrographic/Topographic (DMAH/TC).
5. Bowditch, N., 1984, *American Practical Navigator*, 1984 ed., DMAH/TC.
6. Bowditch, N., 2002, *The American Practical Navigator*, Bicentennial ed., National Imagery and Mapping Agency (NIMA).
7. Cutler, T. J., 2003, *Dutton's Nautical Navigation*, 15th ed., Annapolis: Naval Institute Press.
8. Royal Navy, 2008, *Admiralty manual of navigation: The Principles of Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
9. Chen, C. L., 2003, *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University.
10. Chen, C. L., Liu, P. F. and Gong, W. T., 2014, "A Simple Approach to Great Circle Sailing: The COFI Method," *Journal of Navigation*, 67(3): 403-418.
11. Chen, C. L., 2016, "A Systematic Approach for Solving the Great Circle Track Problems Based on Vector Algebra," *Polish Maritime Research*, 23-2(90): 3-13.
12. Miller, A. R., Moskowitz, I. S. and Simmen, J., 1991, "Traveling on the Curved Earth," *Journal of the Institute of Navigation*, 38(1): 71-78.
13. Nastro, V. and Tancredi, U., 2010, "Great Circle Navigation with Vectorial Methods," *Journal of Navigation*, 63(3): 557-563.
14. Chen, C. L., Hsieh, T. H. and Hsu, T. P., 2015, "A Novel Approach to Solve the Great Circle Sailings Based on Rotation Transformation," *Journal of Marine Science and Technology*, 23(1): 13-20.
15. 陳志立、郭倍宏、簡鈺峰, 2016, 「基於變數變換對測天簡算表的應用程式」, 台灣海事安全與保安研究學刊, 7(3): 1-24。
16. Clough-Smith, J. H., 1966, *An Introduction to Spherical Trigonometry*, Brown, Son & Ferguson, Ltd., Glasgow.

17. Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R., 2005, "New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position," *Journal of Navigation*, 58 (2): 315-335.
18. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., 2004, "A Novel Approach to Great Circle Sailings: The Great Circle Equation," *Journal of Navigation*, 57 (2): 311-320.
19. National Imagery and Mapping Agency (NIMA), 2000, *Department of Defense World Geodetic System 1984: Its definition and relationship with local geodetic systems*, Technical Report NIMA TR8350.2., Third Edition.
20. Bennett, G. G., 1996, "Practical Rhumb Line Calculations on the Spheroid," *Journal of Navigation*, 49(1): 112-119.
21. Earle, M.A., 2006, "Sphere to Spheroid Comparisons," *Journal of Navigation*, 59(3): 491-496.
22. 王國維，1910，「三種境界」，人間詞話，二六。