

## 基於變數變換對測天簡算表的應用程式<sup>※</sup>

### Developing Numerical Programs of Sight Reduction Tables Based on Variables Transformation

陳志立<sup>\*</sup>、郭倍宏<sup>\*\*</sup>、簡鈺峰<sup>\*\*\*</sup>

#### 摘要

六冊系列之航海測天簡算表（簡稱 Pub229 表）係專為大洋中實用航海學所設計的視查表冊；其應用，除截距法或校對羅經外，Pub229 表採用變數變換，推廣至天體識別以及大圈航路等。本文為易於判斷計算結果，引進固定座標並配合變數變換，分別推導出三組控制方程組，進而建構出三個程式，完整地展現 Pub229 表的應用。由於天文三角形是地球的天赤道系統與觀測者的天水平系統的組合，據此，已知天赤道位置求解天水平位置的程式可應用於截距法或校對羅經；而已知天水平位置反向計算求解天赤道位置的程式可應用於天體識別；若將天文三角形變換至地文三角形的程式則可求解大圈航路的問題。另外，亦對 Pub229 表及其內插表的巧妙編排提出數學的詮釋，最後，三個程式均透過數個例題確認並展現出程式的簡單且準確之優點。

關鍵詞：截距法、校對羅經、天體識別、大圈航路。

---

<sup>※</sup> 本文是國立臺灣海洋大學研究計畫(NTOU-103-001)之部分成果，承蒙經費補助，謹此致謝。

<sup>\*</sup> 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系副教授，國立臺灣大學工學博士。

E-mail: [clchen@mail.ntou.edu.tw](mailto:clchen@mail.ntou.edu.tw)

<sup>\*\*</sup> 郭倍宏 Pei-Hung Kuo，國立臺灣海洋大學商船學系碩士班研究生。

<sup>\*\*\*</sup> 簡鈺峰 Yu-Fong Jian，國立臺灣海洋大學商船學系學生。

## ABSTRACT

The six-volume series of *Sight Reduction Tables for Marine Navigation* (named as **Pub229**) is to facilitate the practical navigation at sea. Apart from the intercept method or compass error existing in the applications of the Pub229, others like star identification and great circle track by using variables transformation are usually encountered. Three sets of governing equations are derived by using variables transformation in the fixed coordinate system for easily judging results and then, three numerical programs are developed. Since the celestial triangle is constructed by the celestial equator system (CE) of the Earth and the celestial horizon system (CH) of the observer. The first program (**229Pro\_CE2CH**) of giving the position of CE to obtain the position of CH can be used for the intercept method or compass error. The second program (**229Pro\_CH2CE**) of giving the position of CH to reach the position of CE can be adopted for star identification. The third program (**229Pro\_GCT**) of transforming the celestial triangle to the terrestrial triangle can be solved for great circle track problems. Besides, the explanatory remarks for the genius arrangement of the Pub229 tables and its interpolation table are also proposed. Finally, the three programs are conducted through demonstrated examples to show the advantages of their accuracy and simplicity.

**Key words:** Intercept method, Compass error, Star identification, Great circle track.

## 壹、緒論

全球導航衛星系統 (global navigation satellite system, GNSS) [美國系統為 GPS, 俄羅斯則是 Glonass], 由於其低成本的接收設備與高效用, 使其廣泛地被應用於船位之決定; 然除軍事加密外, 該系統尚有干擾噪音 (jamming noise) 或欺騙信號 (spoofing signals) 等易產生的操作缺點 (operational vulnerabilities) [1-3]; 1995 年客輪“M/V Royal Majesty”擱淺事故即為一例, 美國運輸安全委員會 (NTSB) 建議: 「鼓勵開發相對於 GPS 的備用系統。」[4], 據此, 引進資訊科技於天文航海學, 已為必然之趨勢。無獨有偶, 1978 年航海人員訓練、發證與當值標準國際公約 2010 年修正案 (STCW 78/95/10), 其建議準則 (B-II/1) 亦明白確認此趨勢[5], 此引發本文的起始動機。

目前海事教育訓練或海上實務作業, 天文航海學的內容係以「截距法」(intercept method, IM) 為主[6-14], 該法在海圖上的呈現即是單一天體的天文位置線 (LOP), 而實踐過程則為計算附加圖解法; 其中的計算就是使用航海測天簡算表 (*Sight Reduction Tables for Marine Navigation*), 其美國版編號 Pub229, 英國版為 NP401; 本文則簡稱

**Pub229 表**[15]。若仔細地審視 Pub229 表，則其應用不只是截距法，還有校對羅經、天體識別以及大圈航路等。由於天文三角形是地球的天赤道系統（celestial equator system, CE）與觀測者的天水平系統（celestial horizon system, CH）的組合，故進而聚焦思考天文三角形，歸納其應用並可分為三類：一是給予天赤道位置求解天水平位置（CE2CH），其可應用於截距法或校對羅經；另一為給予天水平位置反向計算天赤道位置（CH2CE），其可應用於天體識別；最後則是將天文三角形變換至地文三角形，其不僅可求解大圈的基本資訊亦可求得大圈航路（great circle track, GCT）上的各轉向點位置；據此，本文為易於判斷計算結果，引進固定座標且採用「變數變換」技巧，分別推導出三組控制方程組，並建構出三個程式，完整地展現 Pub229 表的應用。另外，針對 Pub229 表及其內插表（interpolation tables）等的編排設計亦提出數學之詮釋。

除緒論外，後續章節安排如下：第二章詮釋 Pub229 表；第三章採用變數變換，推導控制方程組，進而建構程式；第四章則是例題驗證與評論；最後，將結論列於第五章。

## 貳、航海測天簡算表之詮釋

Pub229 表是專為截距法所設計的視查表冊，故先說明截距法之構思及其推論過程（含計算內容）；繼而針對該過程，以數學觀點分別詮釋 Pub229 表及其內插表的編排設計。

### 2.1 截距法之構思

由於一般觀測高度的天文位置圈（COP）在海圖上無法繪製，然因該 COP 曲率甚小，可視為天文位置線（LOP）；此「以直逼曲」思維即是截距法（IM）的核心概念。截距法的具體構思係在推算船位（dead reckoning, DR）附近取一假設位置（assumed position, AP），並計算出 AP 和天體之地理位置（geographical position, GP）間之大圈弧距離，此為計算餘高（co-computed altitude,  $90^\circ - H_c$ ），再將此計算餘高與觀測餘高（co-observed altitude,  $90^\circ - H_o$ ）相比較，可得「截距」（intercept,  $a$ ）；當  $H_o$  大於  $H_c$  時，LOP 向天體方位（toward）平行移動「截距」長度，而當  $H_o$  小於  $H_c$  時，則 LOP 離天體方位（away）移動「截距」長度[6-14]。據此，使用截距法並在海圖上繪製 LOP 的要素則有假設位置（AP）、計算方位（ $Z_n$ ）和截距（ $a$ ）等三要素；其推論過程則整理如圖 1 所示。而欲獲得計算高度（ $H_c$ ）與計算方位角（ $Z$ ），則必須使用球面三角學的基本公式求解，準此，截距法中的計算即是 Pub229 表的主要用途。另外，在截距法這一巧妙構思裡，存在著兩項基本假設：一為當餘高夠大時，才可將 COP 視為 LOP，即「以直逼曲」的概念[高度假設]；另一則是真實天文船位（astronomical vessel position, AVP）和假設位置（AP）對天體的地理位置（GP）的方位是相同[方位假設]。然事實上，真實天文

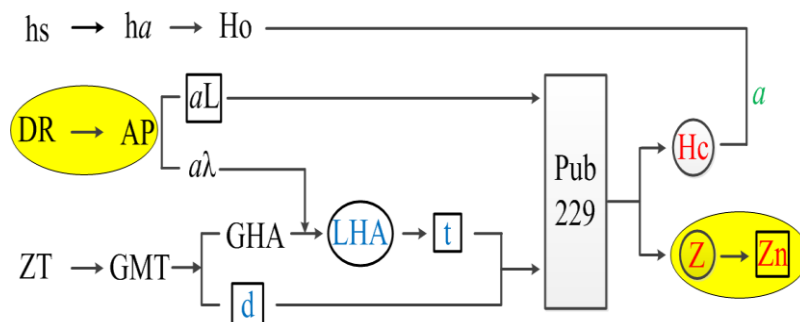


圖 1. 截距法繪製 LOP 三要素的推論過程

船位是未知的，所以在本質上截距法屬於試誤法 (trial-and-error)。當截距在 15' 且觀測高度 ( $Ho$ ) 超過  $60^\circ$  時，於麥氏海圖上用 LOP 取代 COP 會產生 0.1' 的曲率誤差 (error of curvature) [15]。鑑此，採用截距法決定天文船位，其準確性將會受這兩項基本假設影響 [16-19]；而 Pub229 表則已考量此兩項基本假設，所以才有令人讚嘆的編排巧思。

## 2.2 Pub229 表的編排設計

Pub229 表的輸入變數或查表引數 (entering arguments) 分別是當地時角 (local hour angle, LHA)、假設位置緯度 (latitude, L) 及天體赤緯 (declination, d)；而輸出變數或結果 (respondents) 則分別為天體計算高度 (computed altitude, Hc) 與計算方位角 (azimuth angle, Z)。如圖 1 所示，在考量縮減表冊，Pub229 表以 AP 思維設計編排，其可使得 LHA (頁碼) 與 L (橫欄) 兩者皆為整度數 (integral degrees)，而天體赤緯 (d) 因無法掌控，則編排在直欄，並另設計內插表來修正表列高度 (tabular altitude, ht) 與表列方位角 (tabular azimuth angle, Zt)，以得到較準確的 Hc 與 Z。

由於 Pub229 表係專為航海測天作業所設計，其基本要求為天體在天水平上；從球面三角學觀點，Pub229 表對頁碼的 LHA 分為兩類：一是以北半球為主 (或以北極為基準) 再分別向東或向西至  $90^\circ$ ，LHA 區間為  $[0^\circ, 90^\circ]$  與  $[360^\circ, 270^\circ]$ ；另一則是以南半球為主再分別向東或向西至  $90^\circ$ ，LHA 區間為  $[180^\circ, 90^\circ]$  與  $[180^\circ, 270^\circ]$ ；為便於說明，前者稱 [LHA] (或謂子午角小於  $90^\circ$ )，後者則稱  $[180^\circ - LHA]$  (或謂子午角大於  $90^\circ$ )。該設計構思係將球面三角形 (球三) 求解結果作一整體性的編排；即若天體在天水平上，則是使用原本球面三角形 (原球三) 求解；然若天體在天水平下，則先變換至互補球面三角形 (互補球三) 求解後再將結果反變換回至原球三之解；準此，Pub229 表中任一球三可處理四個球三，充分地發揮 Pub229 表的最大效果。

進一步詮釋，以 [LHA] 編排 Pub229 表之示意圖 (子午角小於  $90^\circ$ ) 如圖 2 示，而其對應 Pub229 表之球三示意圖則如圖 3 示。對照該兩圖，天體 S1 (在天赤道上) 編排在 Pub229 表左面頁，天體 S2 (在天水平上) 編排於 Pub229 表右面頁上方，天體 S3 (在



圖 2. 以[LHA]編排 Pub229 表之示意圖 (子午角小於 90°)

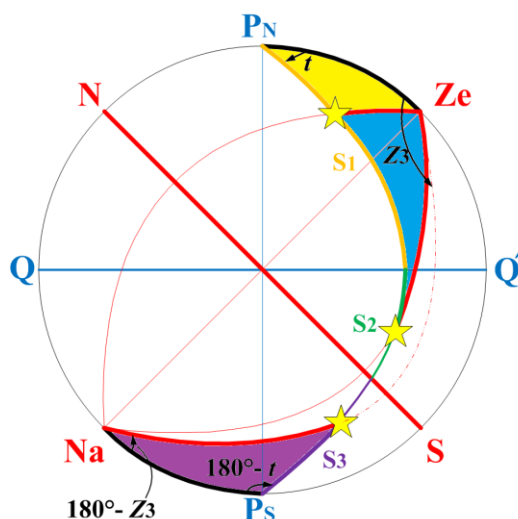


圖 3. 對應 Pub229 表(圖 2)之球三示意圖(子午角小於 90°)

天水平下)編排於 Pub229 表右面頁下方;天體 S1 與 S2 皆可使用原球三,直接由 Pub229 表求解;至於天體 S3 在 Pub229 表裡查不到,必須先變換至互補球三求解,如圖 3 示,變換係以  $180^\circ - LHA$ 、L 變號,而 d 不變號等三引數之原理,求得互補球三的結果;再反變換回至原球三之解,而反變換之原理則是計算高度為負高度 ( $-H_c$ ),而天體方位角用  $180^\circ$  減之(即  $180^\circ - Z$ )。同理,以  $[180^\circ - LHA]$  編排 Pub229 表之示意圖(子午角大於  $90^\circ$ )如圖 4 示,而其對應 Pub229 表之球三示意圖則如圖 5 示。對照觀之,天體 S1 (在天水平上)編排在 Pub229 表右面頁下方,可使用原球三,直接由 Pub229 表求得;然而天體 S2 (右面頁上方)或 S3 (左面頁)皆在 Pub229 表中查不到,故必須先變換至互補球三求解,再將結果反變換至原球三之解。綜言之, Pub229 表的編排設計即善用原球三與互補球三之間的變換,使得表面上看是兩頁 3 個原球三,實際上其可求解 12 個球三,即 6 個原球三與 6 個互補球三;此編排之巧思實令人激賞。

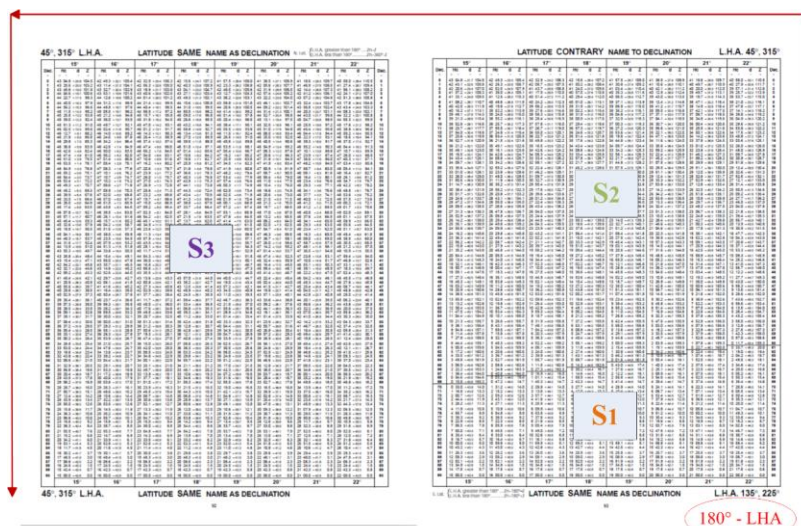


圖 4. 以 $[180^\circ - LHA]$ 編排 Pub229 表之示意圖 (子午角大於  $90^\circ$ )

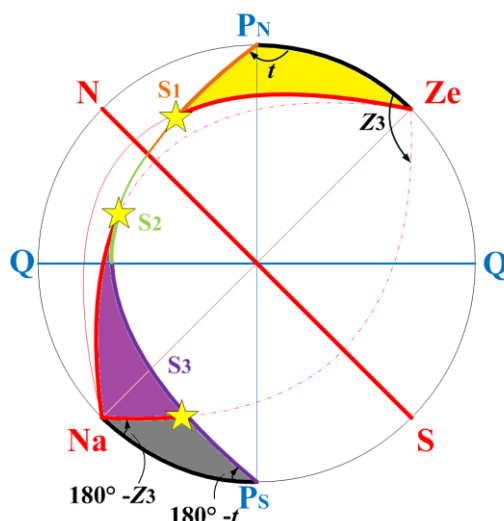


圖 5. 對應 Pub229 表(圖 4)之球三示意圖(子午角大於  $90^\circ$ )

再從 Pub229 表的製表公式[15]詮釋，其分別以邊餘弦律與四鄰公式求解計算高度及計算方位角如下：

$$\sin H_c = \sin L \sin d + \cos L \cos d \cos LHA, \quad (1)$$

$$\tan Z = \frac{\cos d \sin LHA}{\cos L \sin d - \sin L \cos d \cos LHA}. \quad (2)$$

式(1)係在原球三求解，恆為正值，故計算高度的範圍為 $[0^\circ, 90^\circ]$ ；而式(2)， $\arctan$  的值域為 $[-90^\circ, 90^\circ]$ ，然計算方位角的範圍則是 $[0^\circ, 180^\circ]$ ，據此，若求得  $Z$  為負角度（第四象限），則採用互補原則，將其換算至第二象限，即  $180^\circ + Z$ 。另值得說明的是，Pub229 表

在左面頁右上角及右面頁左下角分別提供在北緯或南緯的「方位角換算至方位之法則」；該方位（azimuth, Zn）分類的構思與前述的 LHA 完全相同，有「異曲同工」之妙；此對後續方程組之推導頗有助益。

### 2.3 Pub229 表之內插表的編排設計

如圖 1 示，Pub229 表採用 AP 思維，使得 LHA 與 L 兩者皆為整度數，僅赤緯（d）無法控制；為此，回到 Pub229 表，如圖 2 或圖 4 示，其表列結果設有高度差（altitude difference, ad）或稱一次差，其是相鄰 1° 之赤緯的高度增減值；至於方位角差（azimuth angle difference, Zd）則要自行計算。高度差（ad）與赤緯增量（declination increment, DecInc）等兩者構成內插表（interpolation tables），其公式[15]如下：

$$\text{Cor.} = \text{ad} \times \frac{\text{DecInc}}{60'} \quad (3)$$

又如 2.1 述，截距法有[高度假設]及[方位假設]等兩項。對[高度假設]，因以 LOP 取代 COP 之「以直逼曲」所產生的曲率誤差，Pub229 表係使用內插表修正，該表位於封面或封底內頁，共 4 頁 8 表；除縮減內插編排外，更基於[方位假設]，特別設計縮編範圍至[0.0, 9.9]區間的第二部分修正（P2 Cor.），它除便於方位角修正外，亦有提醒的功用；更為了補償 P2 Cor. 所造成之誤差，則在第一部分修正（P1 Cor.）內加上小量調整（modified by small quantities）。內插表的編排格式如圖 6 示，橫欄為高度差，分為第一部分「十位數」（tens, T）與第二部分「個位數及小數」（units and decimals, U&D）；即  $\text{ad} = \text{T} + \text{U\&D}$ ；而直欄則是赤緯增量（DecInc）；至此，建構 Pub229 表之內插表的兩個製表公式整理如下：

$$\text{P1 Cor.} = \text{T} \times \frac{\text{DecInc}}{60'} + \left(\frac{9.9}{2}\right) \times \frac{[\text{DecInc} - \text{mid}(\text{DecInc})]}{60'} \quad (4)$$

$$\text{P2 Cor.} = (\text{U\&D}) \times \frac{\text{mid}(\text{DecInc})}{60'} \quad (5)$$

INTERPOLATION TABLE

Dec. Inc.	Altitude Difference (d)																			Double Second Diff. and Corr.
	Tens					Decimals				Units										
	10'	20'	30'	40'	50'	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'					
24.0	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	.0	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.9	3.3	3.7	0.8			
24.1	4.0	8.0	12.0	16.0	20.1	.1	0.0	0.4	0.9	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.3	3.7	2.5	0.1		
24.2	4.0	8.0	12.1	16.1	20.1	.2	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.3	3.8	4.1	0.2		
24.3	4.0	8.1	12.1	16.2	20.2	.3	0.1	0.5	0.9	1.3	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	5.8	0.3		
24.4	4.1	8.1	12.2	16.3	20.3	.4	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	7.4	0.4		
24.5	4.1	8.2	12.3	16.3	20.4	.5	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	3.5	3.9	9.1	0.5		
24.6	4.1	8.2	12.3	16.4	20.5	.6	0.2	0.7	1.1	1.5	1.9	2.3	2.7	3.1	3.5	3.9	10.7	0.6		
24.7	4.1	8.3	12.4	16.5	20.6	.7	0.3	0.7	1.1	1.5	1.9	2.3	2.7	3.1	3.6	4.0	12.3	0.7		
24.8	4.2	8.3	12.4	16.6	20.7	.8	0.3	0.7	1.1	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	14.0	0.8		
24.9	4.2				20.8	.9	0.4	0.8	1.2						3.6	4.0	15.6	0.9		
25.0	4.1				20.8	.0	0.0	0.4	0.8						3.4	3.8	17.3	1.0		
25.1	4.2	8.3	12.5	16.7	20.9	.1	0.0	0.5	0.9	1.3	1.7	2.2	2.6	3.0	3.4	3.9	18.9	1.1		
25.2	4.2	8.4	12.6	16.8	21.0	.2	0.1	0.5	0.9	1.4	1.8	2.2	2.6	3.1	3.5	3.9	20.6	1.2		
25.3	4.2	8.4	12.6	16.9	21.1	.3	0.1	0.6	1.0	1.4	1.8	2.3	2.7	3.1	3.5	4.0	22.2	1.3		
25.4	4.2	8.5	12.7	16.9	21.2	.4	0.2	0.6	1.0	1.4	1.9	2.3	2.7	3.1	3.6	4.0	23.9	1.4		
25.5	4.3	8.5	12.8	17.0	21.3	.5	0.2	0.6	1.1	1.5	1.9	2.3	2.8	3.2	3.6	4.0	25.5	1.5		
25.6	4.3	8.5	12.8	17.1	21.3	.6	0.3	0.7	1.1	1.5	2.0	2.4	2.8	3.2	3.7	4.1	27.2	1.7		
25.7	4.3	8.6	12.9	17.2	21.4	.7	0.3	0.7	1.1	1.6	2.0	2.4	2.8	3.3	3.7	4.1	28.8	1.8		
25.8	4.3	8.6	12.9	17.2	21.5	.8	0.3	0.8	1.2	1.6	2.0	2.5	2.9	3.3	3.7	4.2	30.4	1.9		
25.9	4.4	8.7	13.0	17.3	21.6	.9	0.4	0.8	1.2	1.7	2.1	2.5	2.9	3.4	3.8	4.2	32.1	2.0		
																	33.7	2.1		
																	35.4	2.2		

圖 6. Pub229 表之內插表的編排格式

其中 mid(DecInc)為最接近 DecInc 且尾小數是 0.5'者。試舉例說明：若 ad=44.4'，DecInc=25.9'，則以式(3)計算可得 Cor.=19.166'；又分別以式(4)與式(5)計算求得 P1 Cor.=17.266+0.033=17.299'，P2 Cor.=1.87'，合計則為 19.169'；另外，如圖 6 示，採用內插表，查得 Cor.=17.3+1.9=19.2'；顯見內插表的表列結果符合航海需求。值得一提的是 P1 Cor.內小量調整的範圍為[-0.042, +0.033]，其目的為減少截尾誤差 (rounding error)。再度強調：大費周章的編排係考量截距法的[方位假設]；其查表引數為方位角差 (Zd) 與赤緯增量 (DecInc)；其修正量單位為度。

再回到截距法的[高度假設]，一般觀測高度時，採用 Pub229 表並使用「線性修正」的內插表，所求得計算高度 (Hc) 與真方位 (Zn) 可符合航海需求；然在較高高度時，因高度方程式為 sin 函數，即式(1)是曲線，故當 Hc 大於 60°時，僅作線性內插會有「以直逼曲」的誤差，其值約 0.25'；但若加作雙二次差 (double-second difference, DSD) 修正，則誤差可降至 0.1'。前述高度差 (ad) 在數學上具有「差分」概念，而所謂 DSD 就是「後差分減去前差分之值」，於 Pub229 表可自行計算，DSD 恆為負值，然其 DSD cor. 則恆為正值，可在內插表之最右欄查得；另外，在高高度觀測的情境，查表時，會發現方位角差 (Zd) 大於 9.9°，即提醒改採用 Pub229 表所提供的「近天頂內插法」；其作法是：令緯度增量 (latitude increment, LInc) 與 DecInc 相同，兩者一起使用內插表；即重新選擇 AP，亦可同時降低高度差(ad)與 Zd，使其符合截距法的兩項假設。依據 Pub229 表中偏移表 (table of offsets) 的資訊，在實務作業上，當 Hc 在區間(84°, 87°]時，使用「近天頂內插法」；而當 Hc 在區間(87°, 90°)時，直接使用高高度觀測的圖解法，在海圖上繪製 COP；至於天體在中天時，則是「中天求緯」。



## 2.4 Pub229 表之特殊技巧

至此，Pub229 表及內插表是針對天體赤緯為非整度數時使用，由於僅修正高度差，故稱“ad only method”。若三個查表引數，LHA、L 及 d 等皆是非整度數，即所謂的「以 DR 取代 AP」，則 Pub229 表建議[15]：使用偏移表的資訊，作圖並量測偏移量 (offsets)，藉以修正計算高度 (Hc)，故稱為「偏移表應用法」[20]；另採用偏微分概念，即三個查表引數中，任兩個引數固定，對第三引數增加或減少一度時，使用式(3)的內插公式計算增減值；經三次線性內插，可加總求得總修正量，如此，修正後的計算方位角 (Z) 即可得，此過程稱為「三次內插法」，又因該法慣用於校對羅經，Pub229 表則稱為「羅經差法」(compass error) [15]。值得說明的是：對計算高度之修正，若採用「偏移表應用法」，因其費時且不準確，則可使用「三次內插法」(或「羅經差法」) 取代之[11]。事實上，若能開發計算程式，其簡易、迅速且準確性，將完全地取代 Pub229 表之特殊技巧，此為本文的主要動機。

## 參、推導方程組與建構應用程式

如緒論所述，歸納 Pub229 表之應用並可分為三類：一是已知天赤道位置計算天水平位置 (CE2CH)，其可應用於截距法或校對羅經；另一為已知天水平位置反向計算天赤道位置 (CH2CE)，可應用於天體識別；最後則是將天文三角形變換至地文三角形，其可求解大圈航路 (GCT) 的問題。據此，採用「以終為始」之思維，首先為易於判斷計算結果，說明固定座標與變數變換，繼而是三組控制方程組之推導，最後則彙整三套計算程序並建構出三個程式以完整地展現 Pub229 表的應用。

### 3.1 固定座標與變數變換

從計算觀點思考，就結果之準確性言之，「截尾誤差」遠較「誤差傳播」嚴重，準此，使得選擇方程式較為靈活[6-7, 16-19]；另以建構程式之角度，即簡單的判別式較好，據此，引進固定的地球座標系統，其正負符號係規定以北緯及東經為正值，南緯及西經則為負值；而天球座標系統之規則亦相同。又如圖 1 所示，聚焦在 Pub229 表的輸入變數及輸出變數，可繪製出天赤道系統與天水平系統之關係如圖 7 示；再如 2.2 述，天赤道的 LHA 及天水平的 Zn，它們的分類及換算之構思完全相同，據此，Pub229 表之應用能擴展，其關鍵在於「變數變換」的思維。

### 3.2 CE2CH 控制方程組

如圖 7 與圖 8 所示，皆以邊餘弦律求解計算高度及計算方位角如下：

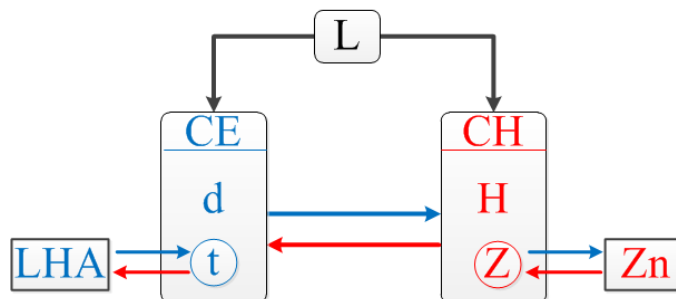


圖 7. 天赤道系統與天水平系統之關係圖

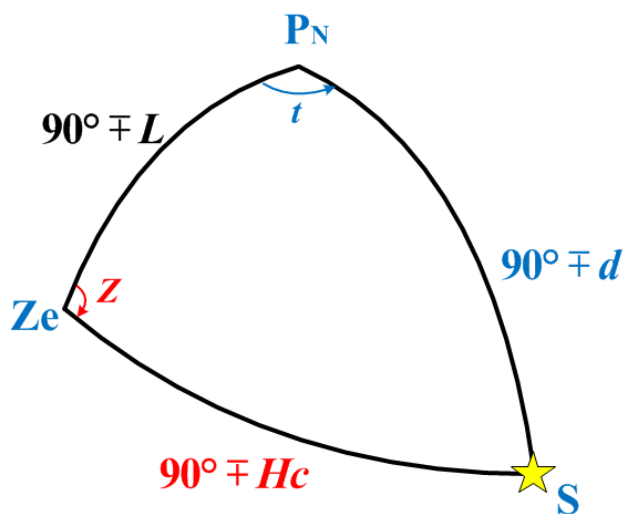


圖 8. 以天赤道為主的天文三角形

$$\sin H_c = \sin L \sin d + \cos L \cos d \cos t, \quad (6a)$$

其中，

$$t = \begin{cases} LHA, & 0^\circ \leq LHA \leq 180^\circ; \\ 360^\circ - LHA, & 180^\circ < LHA \leq 360^\circ. \end{cases} \quad (6b)$$

以及

$$\cos Z = \frac{\sin d - \sin L \sin H_c}{\cos L \cos H_c}. \quad (7a)$$

進而，

$$Z_n = \begin{cases} Z, & 180^\circ < LHA \leq 360^\circ; \\ 360^\circ - Z, & 0^\circ \leq LHA \leq 180^\circ. \end{cases} \quad (7b)$$

式(7a)使用邊餘弦律之理由為採用固定座標系統且  $\arccos$  的值域為 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

### 3.3 CH2CE 控制方程組

以圖 8 為基準，將圖 9 與之對應，採用「變數變換」，同樣地皆以邊餘弦律求解天體赤緯及其子午角如下：

$$\sin d = \sin L \sin H_o + \cos L \cos H_o \cos Z, \quad (8a)$$

其中，

$$Z = \begin{cases} Z_n, & 0^\circ \leq Z_n \leq 180^\circ; \\ 360^\circ - Z_n, & 180^\circ < Z_n \leq 360^\circ. \end{cases} \quad (8b)$$

以及

$$\cos t = \frac{\sin H_o - \sin L \sin d}{\cos L \cos d}. \quad (9a)$$

進而，

$$LHA = \begin{cases} t, & 180^\circ < Z_n \leq 360^\circ; \\ 360^\circ - t, & 0^\circ \leq Z_n \leq 180^\circ. \end{cases} \quad (9b)$$

### 3.4 GCT 控制方程組

再度以圖 8 為基準，將圖 10 與之對應，同樣地採用「變數變換」，且皆以邊餘弦律求解之；分兩步驟計算如下述：

**步驟 1 (Step 1)：**大圈距離 (D) 以及大圈初航向角 (C)；

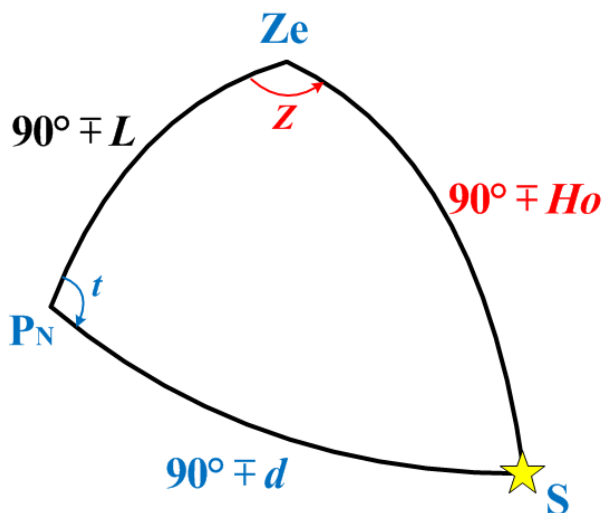


圖 9. 以天水平為主的天文三角形

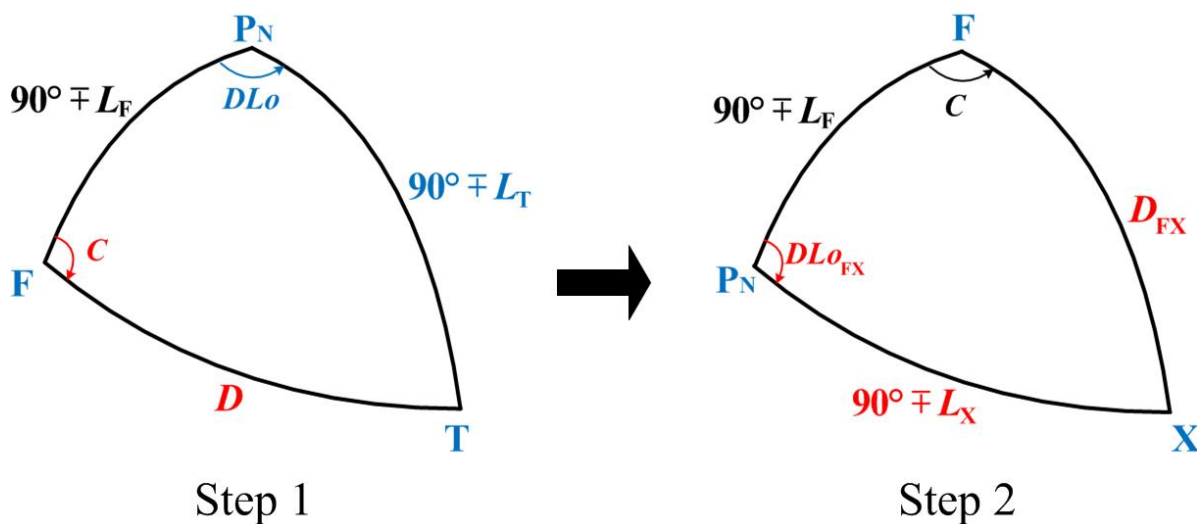


圖 10. 兩步驟的地文三角形

$$\cos D = \sin L_F \sin L_T + \cos L_F \cos L_T \cos DLo, \quad (10a)$$

其中，

$$DLo = \begin{cases} (\lambda_T - \lambda_F) + 360^\circ, & -360^\circ \leq (\lambda_T - \lambda_F) < -180^\circ; \\ (\lambda_T - \lambda_F), & -180^\circ \leq (\lambda_T - \lambda_F) \leq 180^\circ; \\ (\lambda_T - \lambda_F) - 360^\circ, & 180^\circ < (\lambda_T - \lambda_F) \leq 360^\circ. \end{cases} \quad (10b)$$

以及



$$\cos C = \frac{\sin L_T - \sin L_F \cos D}{\cos L_F \sin D}. \quad (11a)$$

進而，

$$C_n = \begin{cases} C, & DLo \geq 0^\circ; \\ 360^\circ - C, & DLo < 0^\circ. \end{cases} \quad (11b)$$

**步驟 2 (Step 2)**：自起航點開始，每隔相等大圈弧轉向，計算各轉向點位置。

$$\sin L_X = \sin L_F \cos D_{FX} + \cos L_F \sin D_{FX} \cos C. \quad (12)$$

以及

$$\cos DLo_{FX} = \frac{\cos D_{FX} - \sin L_F \sin L_X}{\cos L_F \cos L_X}. \quad (13a)$$

進而，

$$\lambda_X = \lambda_F + DLo_{FX}. \quad (13b)$$

上述相關符號及其名詞：F 是起航點，T 是到達點，X 為各轉向點； $L_F$ 、 $L_T$  及  $L_X$  分別是 F, T 及 X 的緯度； $\lambda_F$ 、 $\lambda_T$  及  $\lambda_X$  分別為 F, T 及 X 的經度； $DLo$  為 F 至 T 的經度差， $DLo_{FX}$  是 F 至 X 的經度差； $D_{FX}$  是 F 至 X 之大圈距離； $C_n$  為大圈初航向。

### 3.5 應用程式之建構

如同三組控制方程組之推導；構建計算程序係以 CE2CH 為基本架構，而 CH2CE 與 GCT 等兩者則均採用「變數變換」思維，直接替換變數而得；最後，本文採用 C# (C sharp) 程式語言撰寫 Pub229 表的三個應用程式，並分別命名為 229Pro\_CE2CH, 229Pro\_CH2CE 以及 229Pro\_GCT；另外，為提供友善的面板以便於使用，三個應用程式皆開發成使用者圖形化介面 (graphic user interface, GUI) 的型式。

## 肆、例題驗證與討論

分別使用數個例題驗證本文自行開發的 Pub229 表三個應用程式，即 [229Pro\\_CE2CH](#)，[229Pro\\_CH2CE](#) 以及 [229Pro\\_GCT](#) 等，並展現出應用程式的簡易、迅速且準確性等效能。

### 4.1 229Pro\_CE2CH 程式

**[例題 1-1] 較高高度觀測；高度差與 DSD 修正。**

LHA 038°, L 45°N, d 05°45.5'N，計算 Hc ? [15, 頁 X IV]

**[方法]**

執行 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式。

**[結果與說明]**

操作結果如圖 11 示，Hc 64°11.514'。若使用 Pub229 表，僅作線性內插，得 Hc 64°11.3'；而再加作 DSD 修正，則 Hc 64°11.6' [15]。以程式結果為基準，僅作線性內插，誤差 0.214'；再加作 DSD 修正，誤差則降至 0.086'；該結果如 2.3 的說明。

**[例題 1-2] 校對羅經；三次內插法（或羅經差法）。**

某船舶在 DR L33°24.0'N，觀測太陽的方位為 096.5°pgc；又若已知觀測時的太陽赤緯 20°13.8'N 以及當地時角 316°41.2'，則羅經差為何？[15, 頁 X X IV]

**[方法]**

執行 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式。

**[結果與說明]**

操作結果如圖 12 示，Zn 97.7104°，此是真方位 97.7°；依題意，羅經方位為 096.5°，故可得羅經差 1.2°E。本題為 Pub229 表的例題，其確認 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式所計算結果是正確的。

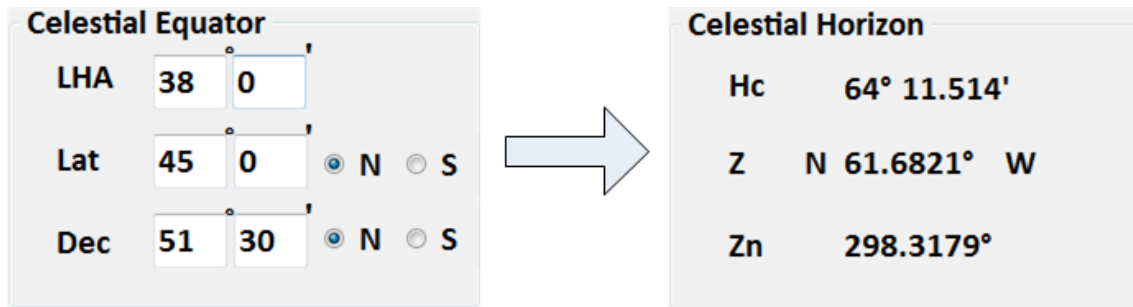


圖 11. 229Pro\_CE2CH 程式操作結果(例題 1-1)

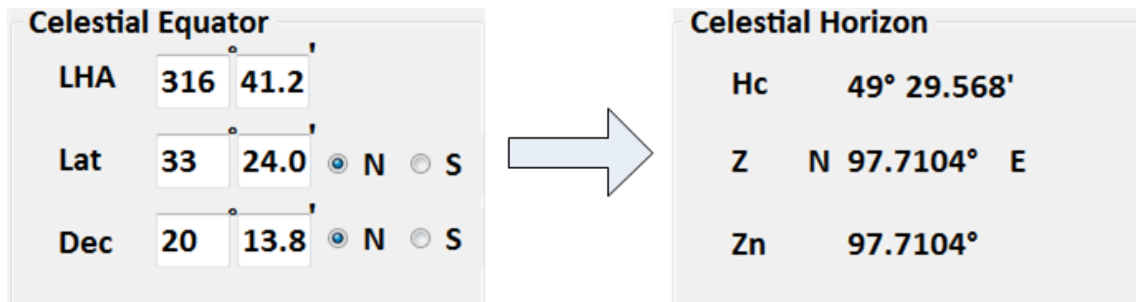


圖 12. 229Pro\_CE2CH 程式操作結果(例題 1-2)

[例題 1-3] 以 DR 取代 AP；偏移表應用法與三次內插法。

已知 LHA 114°24.3', L 41°34.8'N, d 45°58.4'N；求 Hc 與 Zn？[20, 頁 14-17]

[方法]

執行 229Pro\_CE2CH 程式。

[結果與說明]

本題為論文[20]的例題，如 2.4 說明，依 Pub229 表建議，使用偏移表應用法與三次內插法等圖解暨計算，答案為 Hc 15°12.7', Zn 319°；而執行 229Pro\_CE2CH 程式，其結果如圖 13 示，Hc 15°12.684', Zn 319.0141°。兩者相較下，再度確認 229Pro\_CE2CH 程式的計算結果是正確的且較查表暨圖解法迅速且準確。

[例題 1-4] 以 DR 取代 AP；三次內插法。

已知 LHA 311°04.2', L 35°12'N, d 49°23.9'N；求 Hc 與 Zn？[11, 頁 49-51]

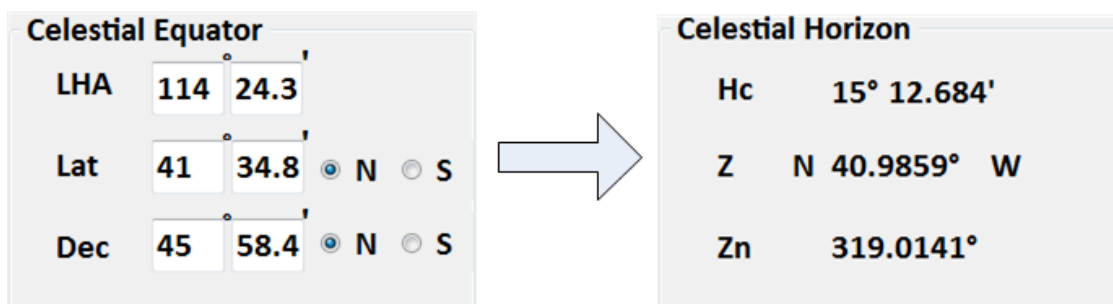


圖 13. 229Pro\_CE2CH 程式操作結果(例題 1-3)

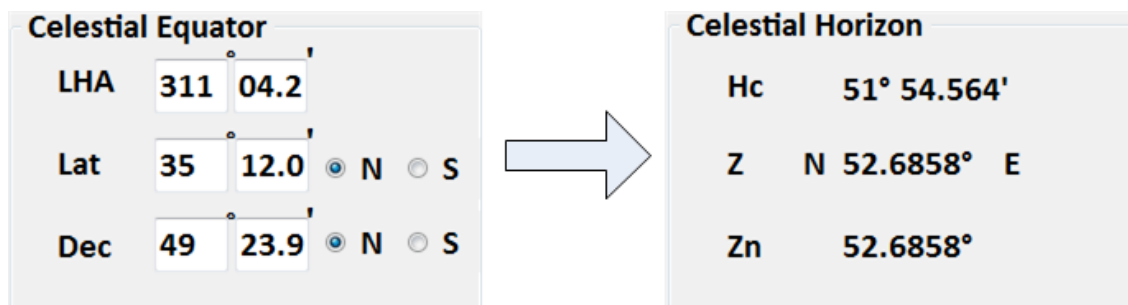


圖 14. 229Pro\_CE2CH 程式操作結果(例題 1-4)

## [方法]

執行 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式。

## [結果與說明]

本題為訓練教材[11]的例題，如 2.4 說明，為避免費時的圖解法，均使用三次內插法計算，解答為 Hc 51°54.4', Zn 052.7°；而執行 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式，其結果如圖 14 示，Hc 51°54.564', Zn 052.6858°。相較下，亦再度確認 [229Pro\\_CE2CH](#) 程式所計算結果是正確的且較查表法迅速且準確。

## 4.2 229Pro\_CH2CE 程式

### [例題 2-1] 天體識別。

已知觀測時的 DR 船位 (35°55'S, 165°19'W) 且從航海曆查得觀測時 GHAY，並經由 DRλ 可得 LHAY 324°；若觀測某天體的高度及其方位分別是 Ho 45°50', Zn 079°，則該天體是哪一顆星體？[15, 頁 XIX: Ex.7]



Celestial Horizon		Celestial Equator	
Zn	079	Dec	17° 47.382' S
Lat	35 55 <input type="radio"/> N <input checked="" type="radio"/> S	t	46° 48.018' E
Ho	45 50	LHA	313° 11.982'

圖 15. 229Pro\_CH2CE 程式操作結果(例題 2-1)

### [方法]

執行 [229Pro\\_CH2CE](#) 程式。

### [結果與說明]

操作結果如圖 15 示，Dec (d) 17°47.382'S, LHA 313°11.982'；據此，SHA= LHA-LHAY= 349°11.982'；而 Pub229 表的答案是 Dec 18°S, SHA 350°，再經航海曆得知該天體為 *Diphda*。本題為 Pub229 表的例題，其驗證 [229Pro\\_CH2CE](#) 程式的計算結果是正確的且較查表法簡易、迅速且準確。

### [例題 2-2] 天體識別之實例。

1990 年 2 月 25 日，在 0616DR 船位 (45°10'N, 030°15'W)，於 ZT 06-12-05 觀測一星，其結果為 Ho 18°46.9', Zn 181.0°，請識別該星體。

### [觀念分析]

天體識別概分為兩步驟求解，步驟 1：如圖 7 示，以緯度 (L)、天體高度 (Ho) 及其方位 (Zn) 等三者以球三公式求解天體赤緯 (d) 與其當地時角 (LHA)；步驟 2：依觀測時間查閱航海曆求得 GHAY，再經 DRλ 換算為 LHAY，則其與 LHA 之差量即是恆星時角 (SHA)；再根據赤緯 (d) 和恆星時角 (SHA) 查閱航海曆，即可識別天體。綜言之，天體識別的關鍵在於步驟 1，即給予天水平位置反向計算天赤道位置(CH2CE)；方法可使用 Pub229 表，依變數變換原理求解；或執行 [229Pro\\_CH2CE](#) 程式得知。至於步驟 2 係以航海曆為主，以時角換算原則求得天體的恆星時角，並以此與赤緯識別天體。

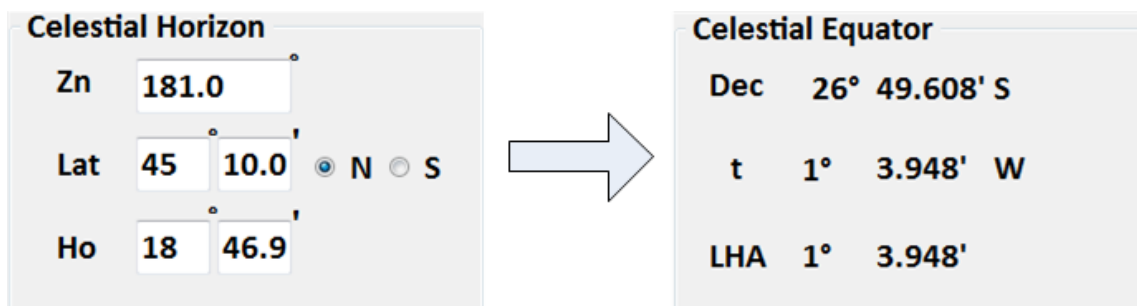


圖 16. 229Pro\_CH2CE 程式操作結果(例題 2-2)

### [求解與其結果]

#### 步驟 1：給予天水平位置計算天赤道位置

##### 1) 使用 Pub229 表：

以圖 9 對照 Pub229 表之基準圖 (圖 8)； $LHA[Zn 181^\circ = ZN 179^\circ W]$ ， $L[L45^\circ 10' N, 45^\circ N]$ 及  $d[Ho 18^\circ 46.9', 19^\circ N]$  (假設兩者同名)，查閱 Pub229 表，查不到；故改用其互補球三查表，即  $LHA = 180^\circ - 179^\circ = 001^\circ E$ ， $L 45^\circ S$  及  $d 19^\circ N$  (兩者異名)，查得  $Hc 25^\circ 59.6'$  與  $Z 178.9^\circ$  [15, 頁 187]；再變換為原球三之解，可得  $d[Ht -25^\circ 59.6' N = 25^\circ 59.6' S]$  與  $t[Zt 180^\circ - 178.9^\circ = 1.1^\circ W]$ ，而  $t$  再換算為  $LHA 001.1^\circ$ 。

##### 2) 執行 229Pro\_CH2CE 程式：

操作結果如圖 16 示，赤緯 (Dec,  $d$ )  $26^\circ 49.608' S$  及其  $LHA 001^\circ 03.982'$ 。

### [步驟 1 之評論]

由於 Pub229 表識別天體係採用概估思維，所以查表引數皆選用最靠近引數的整度數，據此，若熟悉 Pub229 表的編排原理，原球三與互補球三之間的變換，則可相當順手。與查表法比較，229Pro\_CH2CE 程式則是更為簡易、迅速且準確。以步驟 1 的程式結果作為步驟 2 之預備。

#### 步驟 2：航海曆之使用[21, 頁 46]

就觀測時間查閱航海曆求得 GHAY，再依下列公式換算得 SHA：

$$LHAY = GHAY - DR\lambda(W) = 277^\circ 42.3' - 030^\circ 15' = 247^\circ 42.3';$$

$$\text{SHA} = \text{LHA} - \text{LHA} \gamma = 001^{\circ}04.0' - 247^{\circ}42.3' + (360^{\circ}) = 113^{\circ}21.7'。$$

以天赤道位置 (SHA, d) 查閱航海曆得知該星體為 Antares( $112^{\circ}47.8'$ ,  $26^{\circ}24.8'S$ )。

### 4.3 229Pro\_GCT 程式

[例題 3-1] 大圈航路之實例。[6, 頁 616-618]

某船舶由美國 San Francisco ( $37^{\circ}47.5'N$ ,  $122^{\circ}27.8'W$ )，採用大圈航路至澳洲 Sydney ( $33^{\circ}51.7'S$ ,  $151^{\circ}12.7'E$ )。求解大圈航路的基本資訊以及在航路上各轉向點位置[起始條件：自起航點開始，每隔大圈弧  $12^{\circ}$ (720 浬)轉向]？

[方法]

執行 229Pro\_GCT 程式。

[結果與說明]

本題為相關論文[22-25]的測試題。229Pro\_GCT 程式操作結果如圖 17 示；該結果經逐一比對，可確認 229Pro\_CH2CE 程式的計算結果是正確；亦證實採用變數變換原理所推導控制方程組簡潔好用；然對不同起始條件則無法求解。另如圖 17 示；其左上區域為大圈航路的輸入變數，而右上區域是起始條件，輸出結果則列於下方區域；值得說明的是：因 229Pro\_GCT 程式係依 Pub229 表的構思而撰寫，故在右上區域增設 C#選框 (checkbox)，其目的在讓 229Pro\_GCT 程式之應用更具彈性，不僅可供實務用，而且可測試 Pub229 表的結果。本題為大圈航路之實例，所以對**整度數的航向** (integral C) 之選框不予勾選；而為與使用 Pub229 表的查表結果作比對，將本題改編為例題 3-2。

[例題 3-2] Pub229 表的大圈航路。[改編 6, 頁 616-618]

某船舶由美國 San Francisco ( $37^{\circ}N$ ,  $122.5^{\circ}W$ )，採用大圈航路至澳洲 Sydney ( $33^{\circ}S$ ,  $151.5^{\circ}E$ )。求解大圈距離與其初航向以及在航路上各轉向點位置[起始條件：自起航點開始，每隔大圈弧  $20^{\circ}$ (1200 浬)轉向]？

[229Pro\_GCT 程式及其結果]

為測試 Pub229 表之結果，須勾選 integral C；另起始條件則輸入  $10^{\circ}$ (600 浬)以顯示程式之優勢；操作結果如圖 18 示。

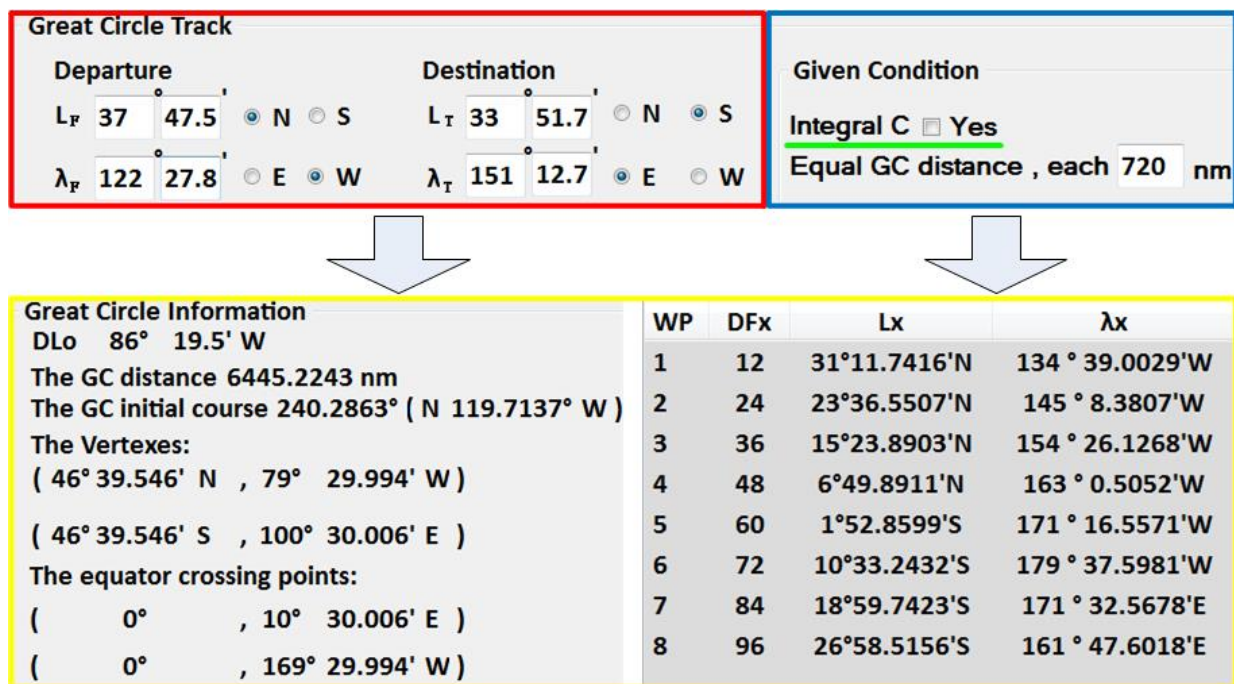


圖 17. 229Pro\_GCT 程式操作結果(例題 3-1)

[Pub229 表求解與其結果]

以圖 10 對照 Pub229 表之基準圖 (圖 8)，分兩步驟求解。

步驟 1：大圈距離與其初航向；

LHA[DLo 086°W]，L[L<sub>F</sub> 37°N]及 d[L<sub>T</sub> 33°S] (兩者異名)，查閱 Pub229 表，查不到；故改用其互補球三查表，即 LHA= 180°- 86°= 94°E，L 37°S 及 d 33°S[兩者同名]可得 Hc 16°19.4'及 Z 060.7°[15, 頁 175]，再換算為原球三之解如下：

大圈距離  $D = (90^\circ + 16^\circ 19.4') * 60' = 6379.4'$ ；

大圈初航向角  $C = N[180^\circ - 060.7^\circ]W = N119.3^\circ W$ ，再換算為初航向  $C_n = 240.7^\circ$ 。

步驟 2：在大圈航路上各轉向點位置。

鎖定起航點緯度與大圈初航向，其大圈航路必然確定[23]；據此，使用 LHA[C 119°W]，L[L<sub>F</sub> 37°N]以及變動  $d = 90^\circ - D_{FX}$ ，查閱 Pub229 表[15, 頁 124-125]，即依起始條件：自起航點開始，每隔大圈弧 20°(1200 浬)轉向；將表列結果逐次抄錄並計算，進而彙編如表 1 所示。



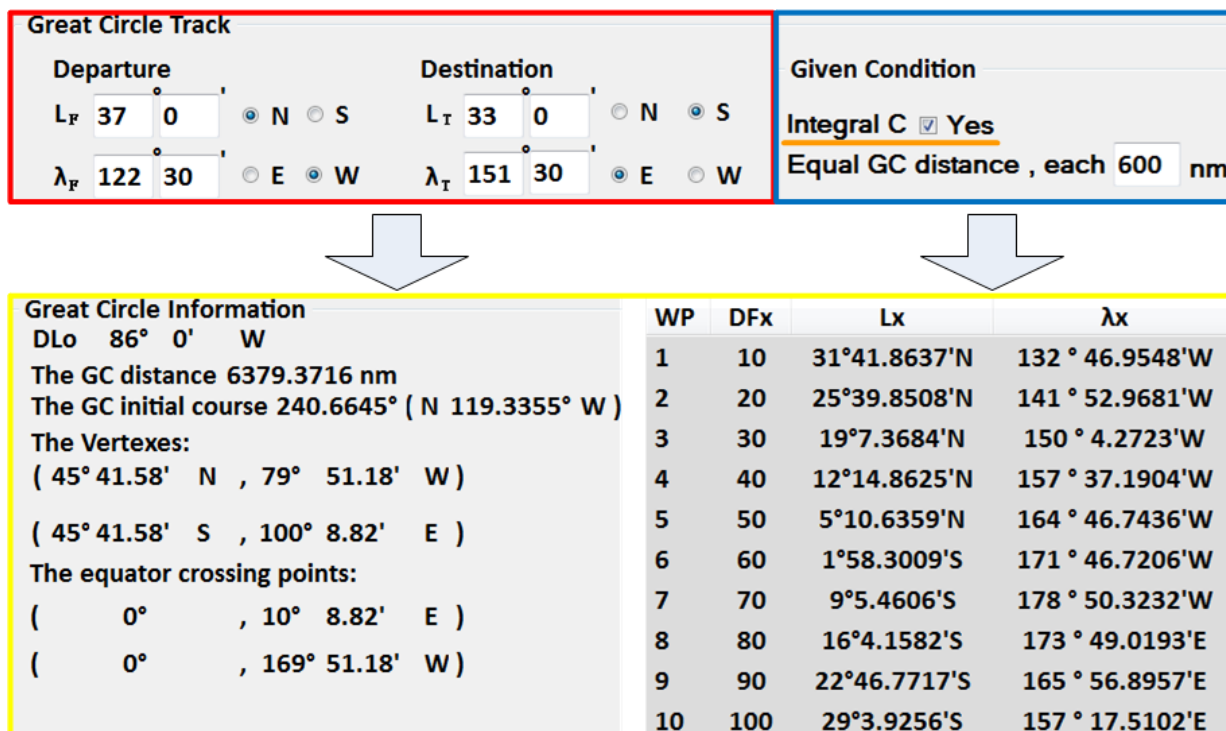


圖 18. 229Pro\_GCT 程式操作結果(例題 3-2)

表 1. Pub229 表求解大圈航路上各轉向點之彙整表

$D_{FX}$	$d=90^\circ-D_{FX}$	$H_i=L_x$	$Z_i=DL_{OFX}$	$\lambda_F$	$\lambda_x$	remark
20°	70°N	25°39.9'N	19.4°W	122.5°W	141.9°W	頁 125
40°	50°N	12°14.9'N	35.1°W		157.6°W	頁 125
60°	30°N	01°58.3'S	(180°-130.7°)W		171.8°W	C-S
80°	10°N	16°04.2'S	(180°-116.3°)W		173.8°E	頁 125
100°	10°S	29°03.9'S	(180°-99.8°)W		157.3°E	頁 124

**[評論]**

使用 Pub229 表，步驟 1 所求得大圈距離 6379.4'及其初航向 240.7°，與程式結果如圖 18 示，相較下，Pub229 表的表現並不差；而步驟 2 大圈航路上各轉向點如表 1 示，亦與程式結果如圖 18 示，逐一比對，除轉向點經度的準確性外，Pub229 表亦有不錯的結果；此證實「截尾誤差」對計算結果係有一定的影響。事實上，若熟悉 Pub229 表的編排原理以及變數變換概念，則使用 Pub229 表求解，其速率並不輸採用計算器法（calculator method），且其準確性亦可符合航海需求；使用 Pub229 表求解大圈航路問題係屬於高級作法。

## 伍、結論

Pub229 表是專為截距法所設計的視查表冊，首先，提出截距法的兩項假設，並以數學觀點詮釋 Pub229 表及其內插表的編排設計。繼而歸納其應用為三類：一是已知天赤道位置計算天水平位置 (CE2CH)，應用於截距法或校對羅經；另一為已知天水平位置反向計算天赤道位置 (CH2CE)，應用於天體識別；最後則是將天文三角形變換至地文三角形，以求解大圈航路 (GCT) 問題。進而採用固定座標與變數變換推導三組控制方程組；再彙整其計算程序並建構出三個應用程式。最後再以例題驗證程式。本文結論彙編如下：

1. Pub229 表已充分地考量截距法的高度假設與方位假設。Pub229 表就是原球三與互補球三的變換，兩頁 3 個原球三，可求解 12 個球三。內插表更基於方位假設，而有第一部分與第二部分修正的設計；至於高度假設，Pub229 表則有設計近天平內插法、DSD 修正、近天頂內插法、偏移表應用法以及三次內插法等技巧修正高度。
2. 推導控制方程組，皆以 CE2CH 為基準，採用變數變換，擴展至 CH2CE 以及 GCT；建構應用程式亦使用相同概念，成功地開發出三個應用程式，即 [229Pro\\_CE2CH](#)、[229Pro\\_CH2CE](#) 以及 [229Pro\\_GCT](#) 等。
3. 三個應用程式皆使用例題驗證，並充分地展現其簡易、迅速且準確性等效能。另外，對 Pub229 表的使用有詳盡的示範及說明；此有智慧的編排設計及其多元應用，以及周延的佈局思維，愈深入瞭解就愈讚賞。

最後，謹以此文向有貢獻於航海用測天簡算表的前輩們，致上最大敬意。

## 參考文獻

1. Lützhöft, M. H. and Dekker, S. W., 2002, "On your watch: Automation on the Bridge," *The Journal of Navigation*, 55(1): 83-96.
2. Carroll, J. V., 2003, "Vulnerability Assessment of the U.S. Transportation Infrastructure That Relies on the Global Positioning System," *The Journal of navigation*, 56(2): 185-194.
3. Schager, B., 2008, "When Technology Leads Us Astray: A Broadened View of Human Error," *The Journal of Navigation*, 61(1): 63-70.
4. National Transportation Safety Board (NTSB), 1995, *Marine Accident Report, Grounding of the Panamanian passenger Ship Royal Majesty on Rose and Crown Shoal near*

- Nantucket (NTSB/MAR-97/01)*, Massachusetts, Washington.
5. IMO, 2010, *1978 International Convention on Standards of Training Certification and Watchkeeping for Seafarers (STCW 78/95/10)*, Amended in 2010.
  6. Bowditch, N., 1984, *American Practical Navigator*, 1984 ed., DMAH/TC.
  7. Bowditch, N., 2002, *The American Practical Navigator*, Bicentennial ed., National Imagery and Mapping Agency (NIMA).
  8. Cutler, T. J., 2003, *Dutton's Nautical Navigation*, 15th ed., Annapolis: Naval Institute Press.
  9. Royal Navy, 2011, *Admiralty manual of navigation: Astro Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
  10. 薩師洪，1997，*航海學 第二部天文航海*，文笙書局。
  11. 錢懷源、朱乾，2000，*航海學*，交通部航行員訓練叢書，幼獅文化事業公司。
  12. 周和平，2013，*天文航海學*，倫悅企業公司。
  13. 陳志立、徐國裕，2015，*航海與船舶操縱 訓練教材*，海洋大學航訓中心。
  14. 陳志立、龔韋婷、徐嫚謙，2016，「求解天文船位方法的創意與啟發」，*台灣海事安全與保安研究學刊*，7(1): 1-18。
  15. Defense Mapping Agency Hydrographic/Topographic Center (DMAH/TC), 1981, *Sight Reduction Tables for Marine Navigation (Pub. No. 229)*, Vol. 3 (Latitudes 30°-45°), Washington.
  16. Chen, C. L., 2003, *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei.
  17. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., 2003, "A Novel Approach to Determine the Astronomical Vessel Position," *Journal of Marine Science and Technology*, 11 (4): 221-235.
  18. Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R., 2005, "New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position," *The Journal of Navigation*, 58 (2): 315-335.
  19. Chen, C. L., Hsu, T. P. and Weng, G. Y., 2014, "New Computational Approaches to Determine the Astronomical Vessel Position Based on the Sumner Line," *Polish Maritime Research*, 21-4(84): 3-11.
  20. 陳志立、謝宗軒、劉思岑，2009，「航海測天解算表之程式開發」，*航運季刊*，18(1): 1-19。
  21. Her Majesty's Stationary Office (UK) and Naval Observatory (USA), 1990, *The Nautical Almanac for the year 1990*, London (England) & Washington (USA).
  22. 陳志立、陳怡君、李彥瑤，2011，「航海者導向的大圈航法之程式開發」，*航運季刊*，20(1): 27-46。
  23. Chen, C. L., Liu, P. F. and Gong, W. T., 2014, "A Simple Approach to Great Circle Sailing: The COFI Method," *Journal of Navigation*, 67(3): 403-418.
  24. Chen, C. L., Hsieh, T. H. and Hsu, T. P., 2015, "A Novel Approach to Solve the Great

- Circle Sailings Based on Rotation Transformation,” *Journal of Marine Science and Technology*, 23(1): 13-20.
25. Chen, C. L., 2016, “A Systematic Approach for Solving the Great Circle Track Problems Based on Vector Algebra,” *Polish Maritime Research*, 23-2(90): 3-13.