

求解天文船位方法的創意與啟發[※]

Inspiration and Innovation of Approaches for Solving the Astronomical Vessel Position

陳志立^{*}、龔韋婷^{**}、徐嫚謙^{***}

摘要

天文航海學中天文船位得以全面地實施，實歸功於「以天文位置線取代天文位置圈」的發現，而該創意係指美國商船船長 Sumner 的「Sumner 線」與法國海軍艦長 Saint-Hilaire 的「截距法」，它們亦驗證了嘗試錯誤法是處理複雜數學的有效取徑，至於誤差則可透過迭代機制消除。另外，本文以函數的概念形式取代球面三角公式來詮釋求解雙天體天文船位方法，以便聚焦在方法論的思維；並期望關注海事教育與訓練者能有所啟發。

關鍵詞：天文船位、Sumner 線、截距法。

ABSTRACT

The discovery that “the line of position (LOP) replaces the circle of position (COP)” was widely used and directed toward of various approaches for determining the astronomical vessel position (AVP) on a chart in practical celestial navigation. The innovation comes from “Sumner line” proposed by Captain Thomas H. Sumner of United States and “intercept method” later modified in application by Commander

[※] 本文是國立臺灣海洋大學研究計畫(NTOU-103-001)之部分成果，承蒙經費補助，謹此致謝。

^{*} 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系副教授，國立臺灣大學工學博士。

E-mail: clchen@mail.ntou.edu.tw

^{**} 龔韋婷 Wei-Ting Gong，國立臺灣海洋大學商船學系碩士。

^{***} 徐嫚謙 Man-Chian Hsu，國立臺灣海洋大學商船學系學生。

Marcq de Saint-Hilaire of French Navy. These two approaches are validated by trial-and-error method, which is an effective methodology for tackling complicated mathematical problems because the numerical error can be eliminated by the iteration scheme. This paper adopts the conceptual forms of functions resulting from spherical triangle formulae to explain various approaches for solving the two-body AVP problem and focus-thinking on their solving approaches. Some inspirations can be given for those who are engaged in the field of maritime education and training.

Key words: Astronomical vessel position (AVP), Sumner line, Intercept method.

壹、緒論

1978 年航海人員訓練、發證與當值標準國際公約 2010 年修正案(The International Convention on Standards of Training, Certification and Watchkeeping for Seafarers, STCW 78/95/10)，其 B 篇建議準則中第 B-II/1 節 19 條明定「天文航海學的適任能力內容」以及 20 條「得使用天文航海計算軟體」[1]，據此，引進計算科技於存在百餘年的天文航海學，已成為必然之趨勢，此引發本文的起始動機。

目前，不論海事教育訓練或海上實務作業，天文航海學均採用「高高度觀測法」(high altitude observation, HAO)或「截距法」(intercept method, IM)等兩種方法；在海圖上，前者為直接圖解法，係是單一天體的天文位置圈(circle of position, COP)，而後者是計算附加圖解法，則為單一天體的天文位置線(line of position, LOP)[2-8]。為瞭解求解天文船位方法的價值，實有必要回顧天文航海科技歷史，1730 年「六分儀」(sextant)的發明[9-10]與 1773 年「天文鐘」(chronometer)之製造[10-12]，讓航海者逐漸地透過觀測天體，如太陽、月球、行星及恆星等，分別獲得船舶的緯度和經度。由於單一天體的 COP 僅適用天體為高高度，即大於 87°時的情境；若在非高高度時，則因作圖困難或 COP 不精確等兩大理由，使得觀測天體高度求解天文船位的構思無法全面實施。在 1837 年美國商船船長薩姆納(Thomas Hubbard Sumner, 1807-1876)提出「以直逼曲」概念，建立在 COP 上的割線 LOP(secant LOP)，該創意改變求解天文船位方法的思維，其不僅為美國海軍所採用，亦迅速傳播至歐洲海事國家，開展了實用航海學的新時代(new era)，而此割線 LOP 即為“Sumner line”[2-3, 9, 13-14]。然因割線 LOP 在天體近中天的情境並不適用[15]，於 1875 年，法國海軍艦長聖希萊爾(Marcq de Blond de Saint-Hilaire, 1832-1889)將割線 LOP 調整為在 COP 上的切線 LOP(tangent LOP)，此切線 LOP 即稱為“Marcq St.-Hilaire method”或「截距法(IM)」，其適用情境較割線 LOP 更為廣泛[2-4, 9]，但仍然無法消除 LOP 在高高度觀測情境時，因「以直逼曲」所產生的誤差。1936 年始，以截距法為主，美國與英國聯合製作航海曆(nautical almanacs)和測天簡算表(sight reduction tables)等配合之，提供給各國商船的航行員使用，直至今日[2-4, 9, 16]。1970 年起，因為計算科技有顯著地

進步，採用雙天體位置圈(COPs)直接或間接等計算方法求解天文船位(astronomical vessel position, AVP)的相關論文相繼發表，豐富了天文航海學的內容。本文為聚焦在計算方法的思維，以函數的概念形式取代球面三角公式來詮釋求解雙天體天文船位方法，此亦為撰寫本文的主要動機。

學理上，有概念(或構思)才能創造出理論架構，進而推導出計算方法(或程序)。除本章緒論外，後續章節安排如下：第二章為單一天體之慣用圖解法；第三章延續第二章說明雙天體天文船位計算方法；第四章則以構建知識系統過程提出一些省思；最後，結論則臚列於第五章。

貳、單一天體之慣用圖解法

首先，簡述目前海事教育訓練或海上實務作業的單一天體之慣用圖解法，進而確認天文船位的典型問題，並引進航進定位概念，以為下一章之預備。

2.1 慣用圖解法

天文定位之基本概念係源自於「平面等高圈」，引進至球面上，則為「球面等高圈」(equal circle of altitude, EAC) 如圖 1 所示。其圓心為天體之地理位置(geographical position, GP)，半徑為觀測餘高(co-observed altitude, $90^\circ - Ho$)。將球面等高圈繪製於海圖上，則為天文位置圈(COP)。當天體赤緯(declination, Dec)與船舶緯度(latitude, L)同名且數值相近時，即為高高度(大於 87°)情境，其方位變遷快，據此，在海上實務作業時，於中天時，連續觀測該天體 3 次以上，可獲得 3 條以上的 COP，它們的交點即為天文船位(AVP)，其屬性為定位(fix)。此過程即「高高度觀測法(HAO)」[2-9]，其係為直接圖解法，推論過程整理繪製如圖 2 所示。圖中，必須提出說明的是，觀測高度(Ho)係由六分儀所量測的觀測高度(hs)經由器差(instrumental error)如器差修正量(I)和指標修正量(IC)以及光學自差(optical deviations)如傾角修正(dip)、折射(refraction)及視差(parallel)等修正求得；另透過航海曆(nautical almanac, NA)，則可依觀測時間獲得天體在天赤道座標系統的位置變數：赤緯(Dec)和格林威治時角(Greenwich hour angle, GHA)。然於非高高度時，COP 的半徑過大，無法使用大比例尺海圖求解，使得定位不精確；又該位置圈在麥氏海圖(Mercator chart)上的變形(distortion)，造成作圖困難等兩大理由，使得觀測天體高度決定天文船位的構思無法全面實施。

1875 年法國海軍艦長聖希萊爾(圖 3)，運用球面三角學提出截距法(IM)[2-9, 14]，其基本構思係在推算船位(dead reckoning, DR)附近取一假設位置(assumed position, AP)，並

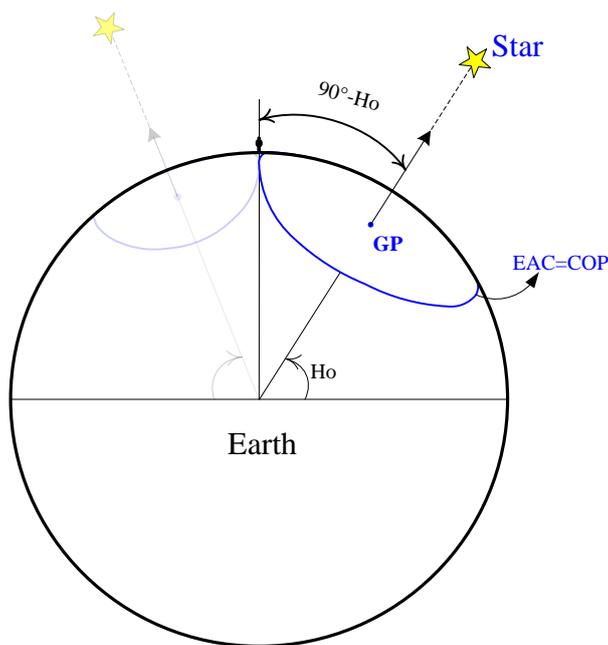


圖 1. 球面等高圈及其要素示意圖

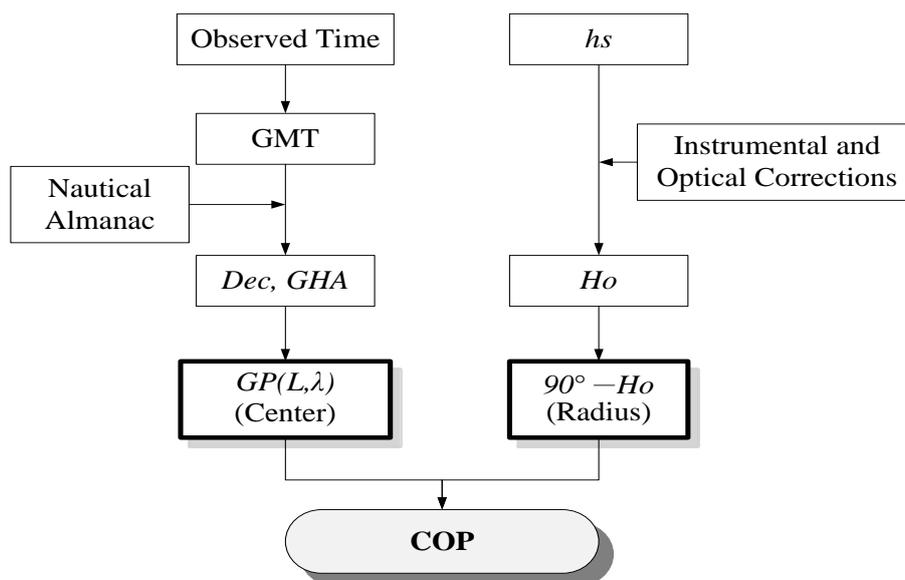


圖 2. 天文位置圈繪製要素的推論流程圖

計算出 AP 和 GP 間之大圈弧距離，此為計算餘高(co-computed altitude, $90^\circ - H_c$)，再將此大圈弧距離與觀測餘高比較，即可得到截距(intercept, a)，故名之。其「以直逼曲」概念：當餘高太大時，COP 曲率甚小，可視為天文位置線(LOP)，即切線 LOP。如圖 4 所示，當 H_o 大於 H_c 時，LOP 向天體方位(toward)平行移動「截距」長度；反之，則 LOP 離天體方位(away)平行移動「截距」長度。據此，「截距法」繪製天文位置線的要素為假設位置(AP)、計算方位(Z_n)和截距(a)，其推論過程則整理繪製如圖 5 示。而欲得計算高度(H_c)與計算方位角(Z)，則必須運用球面三角學的基本公式求解，準此，截距法屬於計算附加圖解法。而截距法這一巧妙構思裡，存在著兩項基本假設：一為天文船位(AVP)和

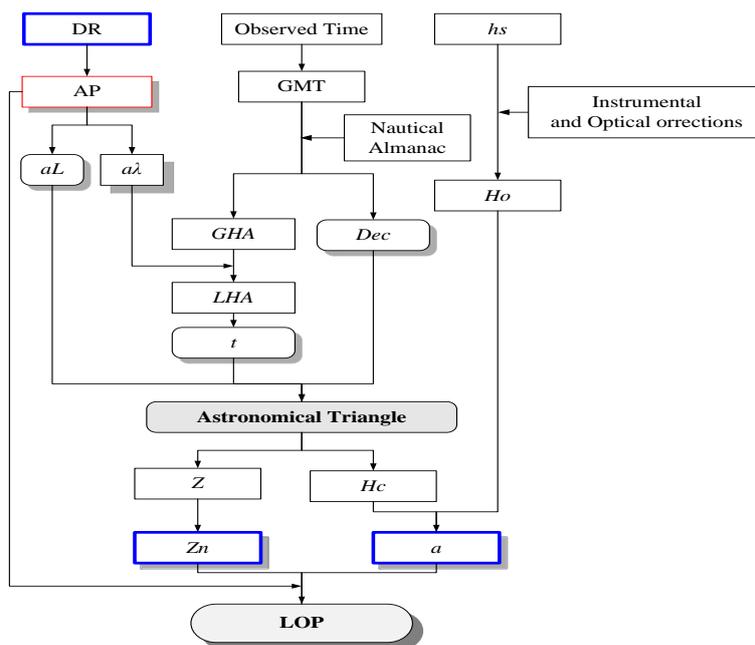


圖 5. 截距法之天文位置線繪製要素的推論流程圖

2.2 航進定位

前述單一天體之慣用圖解法，無法決定天文船位；欲獲得天文船位，則必須至少有雙天體位置圈(COPs)或雙天體位置線(LOPs)。據此，天文船位的典型問題即為係在給定兩次觀測時間及其觀測高度的資訊下，決定天文船位。其包括兩種情況，一為同時或近乎同時觀測到兩天體高度；另一則為不同時間觀測到同一或不同天體高度。對於後者之狀況，則可使用引航學(piloting)中的航進定位(running fix)概念[2-9]，依船舶的航向與航速以及兩次觀測的時間差，採用航法之計算，移動參考點，將情況由後者轉為前者；一般言之，「高高度觀測法」的參考點係指天體的地理位置(GP)，而「截距法」則是假設位置(AP)。值得注意的是，截距法之參考點為 AP 而不是 DR，係因配合測天計算表(sight reduction tables)的設計，然若從計算法之觀點，則應回到起初，以 DR 取代 AP。

參、雙天體天文船位計算方法

與其確認計算公式，不如專注理論概念或構思；據此，透過以函數的概念形式取代球面三角公式來詮釋求解雙天體天文船位計算方法。首先說明球面三角學的基本公式；進而分別論述雙天體位置圈計算方法以及雙天體位置線計算方法。

表 1. 球面三角公式的邊與角關係

球三公式	邊與角的關係式	數量
正弦律	兩對邊角之關係式	3
邊餘弦律	三邊和任一角之關係式	3
角餘弦律	三角和任一邊之關係式	3
四鄰公式	相鄰的兩邊與兩角之關係式	6
計		15

3.1 球面三角學的基本公式

球面三角學為航海學的基本數學，其係探討球面三角形(簡稱球三)之三邊及三角的關係式，其基本公式則由四個變數所組成，共有 C_4^6 ，即 15 個公式；其中正弦律、邊餘弦律、角餘弦律各有 3 個，而四鄰公式則有 6 個；各球三公式的邊與角關係式，如表 1 示。

另外，以函數的概念形式表示如下：

$$F(y; x) = 0,$$

其中， y 為因變數(dependent variable)，而 x 是自變數 x (independent variable)；兩者分置於分號(;)之前與後。

3.2 雙天體位置圈計算方法

從數學觀點，天文位置圈(COP)的本質係為曲線方程式；雙天體位置圈(COPs)則構成聯立曲線方程組，可求得兩交點，再經由推算船位(DR)判定，即可得天文船位(AVP)。雙天體位置圈計算方法可概分為二，其一為代數法(algebraic methods, AM)[17-25]，簡稱為 COPs-AM，該類直接式求解必須使用複雜的數學方法；另一為球三法(spherical trigonometry, ST)[23-33]，簡稱為 COPs-ST，該類間接式求解係採用繁瑣的六步驟計算程序。另一關鍵是兩類的計算公式皆為球三公式且計算過程存在著不少的判別式。

1. 代數法求解雙天體位置圈之船位(COPs-AM)

天文位置圈(COP)的本質為曲線方程式，而雙天體位置圈即可構成聯立曲線方程組，如圖 6 所示，其函數的概念方程組如下：

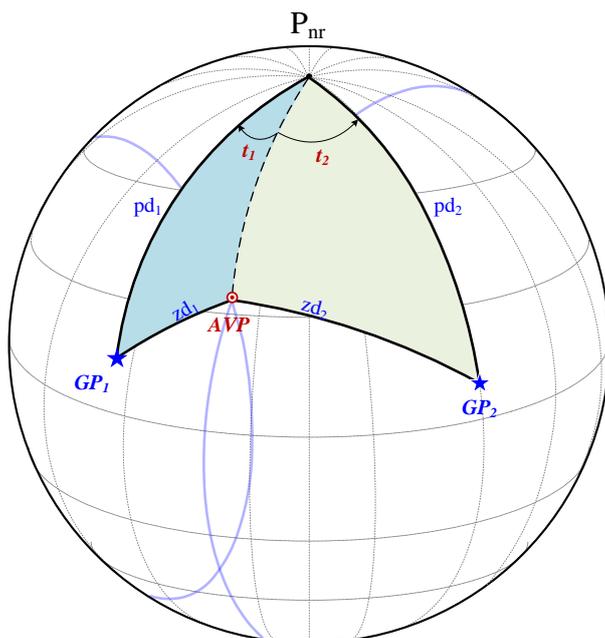


圖 6. 代數法求解雙天體位置圈船位之概念示意圖

$$F[L, t_1(\lambda_1); pd_1(d_1), zd_1(H_1)] = 0,$$

$$F[L, t_2(\lambda_2); pd_2(d_2), zd_2(H_2)] = 0,$$

其中，自變數皆為球三的邊，極距(polar distance, pd)與天頂距(zenith distance, zd)，它們分別是赤緯(d)及觀測高度(H)的函數；因變數則有球三的邊與球三的角度，即餘緯(co-latitude)及子午角(meridian angle, t)，它們分別為緯度(L)及經度(longitude, λ)的函數；上述概念方程式為三邊和任一角之關係式，即球邊餘弦律。此聯立邊餘弦律之建構相當直接，然需要複雜的數學，相關論文的方法比較如表 2 示；舉數篇分別說明它們的思維，Ogilvie[19]係採用上述方程組，以逼近理論求得 L ，其作法為調整 L 求解 t_1 與 t_2 ，直至符合判別式，即 $t_1+t_2=HA$ 為止，即可獲得 L ；而 t_1 與 t_2 再分別換算為 λ_1 與 λ_2 ，至此，可得曲線方程組的兩交點，再依據 DR 來決定 AVP；Van Allen[22]亦採用上述方程組，座標變換至直角座標系統，形成聯立二次方程組，求得 4 組結果，即兩實根與兩虛根，再經 DR 判定 AVP。Chen[23-25]則使用相同的方程組，運用和角公式及恆等式的技巧，求解聯立三角方程組，得到 2 組結果，再依據 DR 可決定 AVP。

表 2. 代數法求解雙天體位置圈船位(COPs-AM)比較表

作者(發表年份)	聯立曲線方程組	數學方法
Flynn (1972)	邊餘弦律與正弦律	Taylor 級數
Fox (1975)	聯立邊餘弦律	逼近理論
Ogilvie (1977)	聯立邊餘弦律	逼近理論
Watkins and Janiczek (1978)	聯立邊餘弦律	矩陣法
De Wit (1979)		
Van Allen (1981)	聯立邊餘弦律	座標轉換
Chen et al. (2003)	聯立邊餘弦律	三角方程
Hsu et al. (2005)	聯立邊餘弦律	三角方程

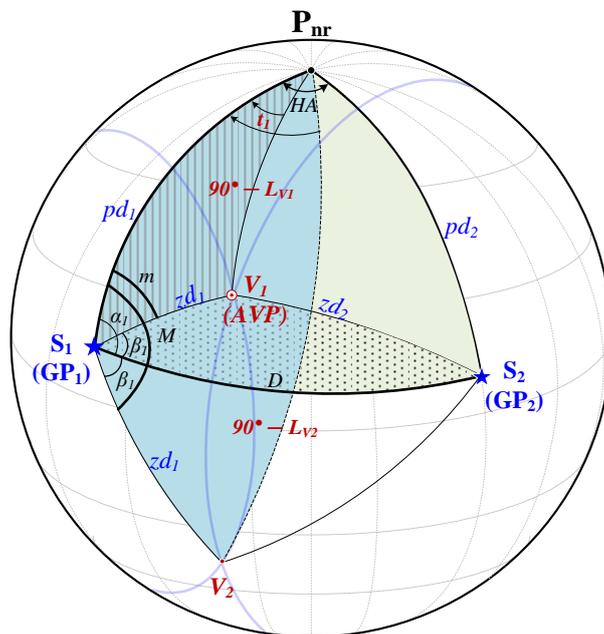


圖 7. 球三法求解雙天體位置圈船位之概念示意圖

2. 球三法求解雙天體位置圈船位(COPs-ST)

如圖 7 所示，已知兩等高度圈的圓心分別為天體的地理位置 S_1 和 S_2 ，而半徑分別為 zd_1 和 zd_2 ；設兩等高度圈的兩交點分別為 V_1 和 V_2 ，其中之一即為天文觀測船位(V)；使用大圈連接 P_{nr} 、 S_1 及 S_2 。至此，已知兩天體的天頂距(即 zd_1 和 zd_2)、極距(即 pd_1 和 pd_2)以及兩天體的時角差(HA)，則球三法求解雙天體位置圈船位(COPs-ST)的求解過程說明如下：

(各步驟之下方即為函數的概念方程式)

步驟1. $\hat{\Delta}P_{nr}S_1S_2$ 中，已知 pd_1 、 pd_2 和 HA ，求兩天體之間大圈距離(D)。

$$F(D; pd_1, pd_2, HA) = 0.$$

步驟2. $\widehat{\Delta P_{nr} S_1 S_2}$ 中，已知 pd_1 、 pd_2 及 D ，求 S_1 的視差角(α_1)。

$$F(\alpha_1; pd_1, pd_2, D) = 0.$$

步驟3. 在 $\widehat{\Delta V_1 S_1 S_2}$ 中，已知 zd_1 、 zd_2 和 D ，求 S_1 的視差角(β_1)。

$$F(\beta_1; zd_1, zd_2, D) = 0.$$

步驟4. $\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_1}$ 中， $m = \alpha_1 - \beta_1$ ； $\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_2}$ 中， $M = \alpha_1 + \beta_1$ 。

步驟5. $\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_1}$ ，已知 pd_1 、 zd_1 及 m ，求 AVP 之緯度 Lv_1 ；

$\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_2}$ ，已知 pd_1 、 zd_1 及 M ，求 AVP 之緯度 Lv_2 。

$$F(Lv_1; pd_1, zd_1, m) = 0,$$

$$F(Lv_1; pd_1, zd_1, M) = 0.$$

步驟6. $\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_1}$ ，已知 zd_1 、 pd_1 及 Lv_1 ，求天體 S_1 的子午角(t_1)，經換算即可得 AVP 之經度 λv_1 ；

表 3. 球三法求解雙天體位置圈船位(COPs-ST)各步驟的球三公式比較表

作者 (發表年份)	公式	邊餘弦律	半角公式	四鄰公式	正弦律	Napier 類別式
Dozier (1949)		(1), (3), (5)		(2), (6)	(2), (6)	
Kotlaric (1971); Kotlaric (1981)		(1), (5)	(2), (3), (6)			
A'Hearn and Rossano (1977)		(1)-(6)				
Bennett (1979)		(1), (3), (5)		(2), (6)		
Chiesa and Chiesa (1990)		(1)	(3)	(2)	(5)	(6)
Pepperday (1992)		(1), (3), (5)		(2), (6)		
Gery (1997)		(1)-(6)				
Chen (2003); Hsu et al. (2005)		(1), (3), (5) (1)-(6)		(2), (6)		

$\widehat{\Delta P_{nr} S_1 V_2}$ ，已知 zd_1 、 pd_1 及 Lv_2 ，求天體 S_1 的子午角(t_1)，經換算即可得 AVP 之經度 λv_2 。

$$F(t_1; zd_1, pd_1, Lv_1) = 0,$$

$$F(t_1; zd_1, pd_1, Lv_2) = 0.$$

除步驟 4 外，各步驟的球三公式，皆是三邊和一角的關係式，而各論文中各步驟所使用的球三公式，彙整如表 3 所示。據此，不考量誤差傳播特性下，各步驟均可使用球三邊餘弦律。綜言之，以球三法求解雙天體位置圈船位(COPs-ST)，其求解公式較為簡單，然其計算程序係屬於間接求解，則較為繁瑣。

3.3 雙天體位置線計算方法

首位發現天文位置線(LOP)者是美國商船船長薩姆納(圖 8)；19 歲畢業於美國哈佛大學(Harvard University)天文暨數學系，30 歲提出該創意[9, 13-14]。如圖 9 示，其構思係採用兩假設緯度，即 L_A 和 L_B ，分別與 COP_1 交於 A_1 及 B_1 兩點，則連接兩點的直線即得 LOP_1 ，稱為 Sumner LOP 或割線 LOP；至於慣用截距法的 LOP 則稱為 Hilaire LOP 或切線 LOP。據此，雙天體位置線計算方法可概分為二，即雙割線位置線(secant LOPs)以及雙切線位置線(tangent LOPs)。茲將兩者分述如下：

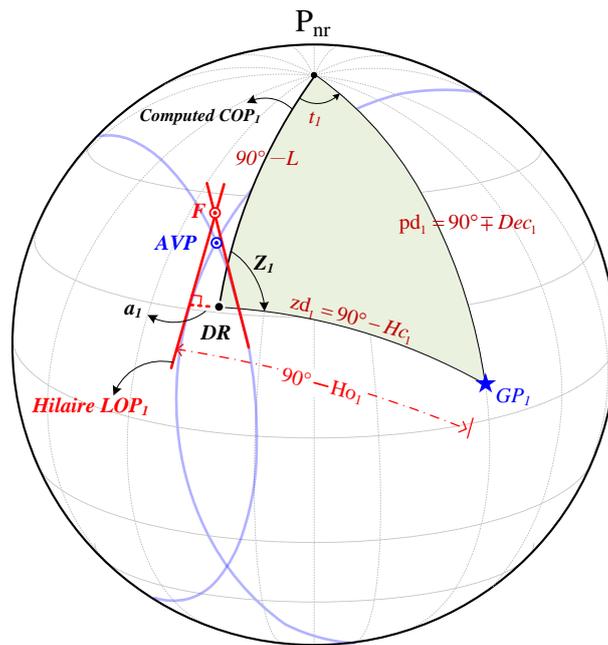


圖 10. 雙切線位置線求解天文船位概念示意圖

連接兩點的直線，即為 Sumner LOP₁，同理，亦可得 Sumner LOP₂；兩線的交點即為天文船位。Wight[34]或 Chen 等人[35]分別使用 Valier 法或代數法決定天文船位(AVP)。

2. 雙切線位置線求解天文船位(tangent LOPs)

具有創意的 Sumner LOP(割線 LOP)，當與緯度線平行時，無法獲得交點；因此 Hilaire LOP(切線 LOP)調整該缺失以提昇適用範圍。如圖 10 所示，使用 DR 為參考點，其計算 COP₁ 的概念方程組如下：

$$F(H_{c1}; L, pd_1, t_1) = 0,$$

$$F(Z_1; L, t_1, pd_1) = 0.$$

它們可求得計算高度(H_{c1})與方位角(Z₁)；繼而可得計算高度(H_{c1})與觀測高度(H_{o1})兩者之高度差，即截距(a₁)；最後獲得 Hilaire LOP₁ 的三要素，即 DR、Z_{n1} 以及 a₁ 等，同理，亦可得 Hilaire LOP₂；兩線的交點即為天文船位(F)；再經迭代機制(iteration scheme)則可決定真實的天文船位(real AVP)。

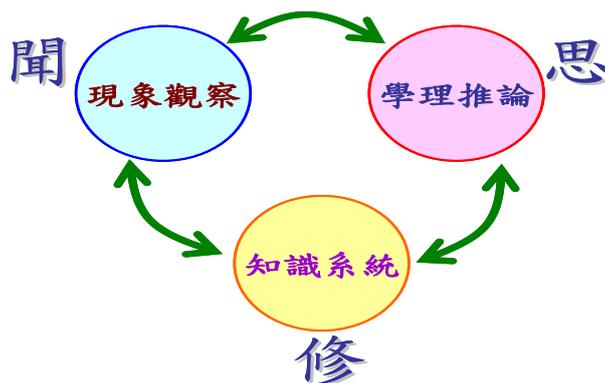


圖 11. 構建知識系統示意圖

3. 迭代機制(iteration scheme)

從計算的觀點論述，雙天體位置圈簡化為雙天體位置線，該簡化構思隱含著試誤法(trial-and-error)的特質，此過程必然產生天文船位不精確的問題，而該問題的解決之道即是採用迭代機制(iteration scheme)；其具體計算程序係於每次迭代前與後的天文船位(AVP)與天體之地理位置(GP)，均必須採用曲線方程組，即透過球面三角學的公式重新計算，使得每次迭代後的天文船位(AVP)沿著曲線的 COP 逐漸地逼近至真實的天文船位(real AVP)。簡言之，迭代機制的口訣可歸納為「沿曲求真、不變為真。」

肆、構建知識系統之省思

以求解天文船位方法為例，從構建知識系統過程，分享科學家的學思(或洞察)，以供省思並期望閱讀者能有所啟發。

1. 構建知識系統過程如圖 11 所示，問題(problems)是現象觀察與知識系統有所落差且在目前時空條件下無法解決者；方法(methodology)係針對問題，將學理推論引進至知識系統並不斷獨立思考而有所發現進而構建之；結果(results)係指學理推論符合現象觀察並藉此增修知識系統，直至具有普適性(universality)。因此，閱讀或評論論文可從「問題-方法-結果」(PMR)等面向逐一思考或檢驗[10, 36]。
2. 知識系統的本質為「天下唯一不變的事就是變」；較可靠的(科學)知識，其現象觀測(或實驗)與學理推論(計算)配合得非常緊密，且相當多的自然現象亦可以在學理推論得知。以航海天文學為例，預測天體視位置為「表象世界」，雖然具體可見，但卻不是實在的，它們真正的運作法則是隱藏在物理學家牛頓(Isaac Newton, 1642-1727)及愛因斯坦(Albert Einstein, 1879-1955)所描述的「觀念世界」，雖然看不見，但才是真實的。準此，社會現象的學理推論更具挑戰性；因為人類可見的行為是「表象世界」，

而不可見的人格(或意志)則是「觀念世界」[37]。

3. 發現問題之省思：分享哲學家叔本華(Arthur Schopenhauer, 1788-1860)的洞察(insight)：「創造力最重要的不是發現前人所未見，而是在人人所見的現象裡，想到前人所未想到。」(“The task is, not so much to see what no one has seen yet; but to think what nobody has thought yet, about that what everybody sees.”)[38]以及物理學家萬伯格(Steven Weiberg, 1933-)的黃金經驗之一：「多閱讀科學史或起碼是你專業的歷史，因為它可讓你知道你的工作在人類文明中的價值。」[39]；此亦為本文的動機。
4. 創新方法之省思：數學家格羅森迪克(Alexander Grothendieck, 1928-2014)對兩種數學風格的看法值得參考；即「若把證明數學定理比喻為敲開堅果，一種方法是用榔頭與鑿子直接攻堅；另一種方法則是把堅果浸在讓其軟化的液體中，然後不時地去搓它，當時間到了，稍微用手一壓就夠了。」[40]；以求解天文船位方法為例，前者為 COPs，而有創意的 LOPs 即屬於後者。
5. 大學不是職業培訓班！然目前海事教育訓練為 STCW 建議課程所塞滿；兩句話以供省思：「大學應教育學生學習『見樹又見林』的能力。」(“The university teaches our students to learn something about everything and everything about something.”)以及愛因斯坦：「最首要的事永遠是培養獨立思考與判斷的一般性能力，而不是特殊知識的獲取。」(“The development of general ability for independent thinking and judgment should always be placed foremost, not the acquisition of special knowledge.”)。

伍、結論

歷經天文航海科技史的智慧旅程後，請別忘記美國商船船長薩姆納和法國海軍艦長聖希萊爾兩人的創意與貢獻，它們被稱為現代天文航海學的兩大支柱[41]；本文將雙天體天文船位計算方法概分為雙天體位置圈計算方法以及雙天體位置線計算方法；前者依數學方法再分為代數法(COPs-AM)與球三法(COPs-ST)，而後者依天文位置線之性質則再分為割線型(Sumner LOPs)以及切線型(Hilaire LOPs)；歸納各類計算方法之結論如下：

1. 雙天體天文船位計算方法的相關論文，大多數皆假設同一觀測時間，然觀測天體作業必然發生在船舶航行時，故此假設不符合海上實際狀況；應採用航進定位的概念修正之。
2. 以 COPs-AM 建構聯立方程組相當直接，然需要複雜的數學方法，且過程中有不少判別式需要判斷；且存在著判定實根或虛根的問題。

3. 相較於 COPs-AM, COPs-ST 的計算公式則較為簡單, 然其間接的計算程序較為繁瑣; 實根或虛根的問題依然存在。
4. 雙天體位置線計算方法, 採用「以直逼曲」構思, 簡化位置圈(COP)為位置線(LOP), 故其本質就是試誤法(trial-and-error), 會產生天文船位不精確的問題; 而該誤差之消除有賴於迭代機制(iteration scheme), 即「沿曲求真、不變為真。」思維。

另外, 本文從建構知識系統過程如發現問題、創新方法及科學知識等, 分享科學家的學思以供省思。最後, 對天文學家、數學家與航海員等前輩們, 致上敬意; 由於他們的努力, 方能採用有天文航海的工具如六分儀、天文鐘、航海曆以及測天簡算表等, 使得海上觀測天體之實務作業能夠簡單、迅速與精確以及智慧的滿足感。

參考文獻

1. IMO, 2010, *1978 International Convention on Standards of Training Certification and Watchkeeping for Seafarers (STCW 78/95/10)*, Amended in 2010.
2. Bowditch, N., 2002, *The American Practical Navigator*, Bicentennial ed., National Imagery and Mapping Agency (NIMA).
3. Cutler, T. J., 2003, *Dutton's Nautical Navigation*, 15th ed., Annapolis: Naval Institute Press.
4. Royal Navy, 2011, *Admiralty manual of navigation: Astro Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
5. 薩師洪, 1997, *航海學 第二部天文航海*, 文笙書局。
6. 周和平, 2013, *天文航海學*, 倫悅企業公司。
7. 錢懷源、朱乾, 2000, *航海學*, 交通部航行員訓練叢書, 幼獅文化事業公司。
8. 陳志立、徐國裕, 2015, *航海與船舶操縱 訓練教材*, 海洋大學航訓中心。
9. Bowditch, N., 1984, *American Practical Navigator*, 1984 ed., DMAH/TC.
10. 陳志立、張建仁, 2006, 「天文觀測定位之演進及其省思」, 2006年海洋文化學術研討會, pp1-24, 2006/11/10。
11. Sobel, D., 1996, *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Great Scientific Problem of His Time*, London and New York: Penguin Books, Science History.
12. 蔡雅芝, 2005, 「經緯度的故事」, *科學發展*, 第 392 期, 頁 68-77。
13. Richardson, R. S., 1946, "CAPTAIN THOMAS HUBBARD SUMNER 1807-1876," *NAVIGATION*, 1(2): 35-40.
14. Oestmann, G., 2011, "Delayed progress in navigation: the introduction of line of position navigation in Germany and Austria," *International Journal on Geomathematics*, 1(2): 133-143.

15. Gradsztajn, E., 1979, "A New Method for Plotting the Position Line: The Golem Solution," *NAVIGATION*, 26(1): 70-77.
16. Royal Navy, 2008, *Admiralty manual of navigation: The Principles of Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
17. Flynn, R. W., 1972, "Computer Sight Reduction Based on Intersection of Equal Altitude Circles," *NAVIGATION*, 19(1): 7-10.
18. Fox, C., 1975, "Finding Latitude and Longitude by Calculators," *NAVIGATION*, 22(4): 293-301.
19. Ogilvie, R. E., 1977, "A New Method of Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 24(1): 67-71.
20. Watkins, R. and Janiczek, P. M., 1978, "Sight Reduction with Matrices," *NAVIGATION*, 25(4): 447-448.
21. De Wit, C., 1979, "Some Remarks on Sight Reduction with Matrices," *NAVIGATION*, 26(3): 252-253.
22. Van Allen, J. A., 1981, "An Analytical Solution of the Two Star Sight Problem of Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 28(1): 40-43.
23. Chen, C. L., 2003, *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei.
24. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., 2003, "A Novel Approach to Determine the Astronomical Vessel Position," *Journal of Marine Science and Technology*, 11 (4): 221-235.
25. Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R., 2005, "New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position," *The Journal of Navigation*, 58 (2): 315-335.
26. Dozier, C. T., 1949, "A Simultaneous Two-Star Fix," *NAVIGATION*, 2(4): 91-92.
27. Kotlaric, S., 1971, "New Short Method Table (K11) for Direct Finding of a Two Star Fix without Use of Altitude Difference Method," *NAVIGATION*, 18(4): 440-449.
28. Kotlaric, S., 1981, "K-12 Method By Calculator: A Single Program for All Celestial Fixes, Directly or by Position Lines," *NAVIGATION*, 28(1): 44-51.
29. A'Hearn, M. F. and Rossano, G. S., 1977, "Two Body Fixes by Calculator," *NAVIGATION*, 24(1):59-66.
30. Bennett, G. G., 1979, "General Convention and Solutions- Their Use in Celestial Navigation," *NAVIGATION*, 26(4): 275-280.
31. Chiesa, A. and Chiesa, R., 1990, "A Mathematical Method of obtaining an Astronomical Vessel Position," *The Journal of Navigation*, 43(1): 125-129.
32. Pepperday, M., 1992, "The Two-Body Problem At Sea," *The Journal of Navigation*, 45(1): 138-142.
33. Gery, S. W., 1997, "The Direct Fix of Latitude and Longitude from Two Observed Altitudes," *NAVIGATION*, 44(1): 15-23.
34. Wight, C., 1976, "Direct Methods of Latitude and Longitude Determination by Mini-Computer," *NAVIGATION*, 23(2):149-156.

35. Chen, C. L., Hsu, T. P. and Weng, G. Y., 2014, "New Computational Approaches to Determine the Astronomical Vessel Position Based on the Sumner Line," *Polish Maritime Research*, 21-4(84): 3-11.
36. 高湧泉，2006，**另一種鼓聲：科學筆記**，初版 2 刷，三民書局。
37. 王溢嘉，1997，**賽琪小姐體內的魔鬼：科學的人文思考**，初版 13 刷，野鵝出版社。
38. Von Bertalanffy, L., 1952, *Problems of life: an evaluation of modern biological thought*, Watts, London.
39. Weinberg, S.(戴守煌 譯)，2015，「給科學家的四則金玉良言」，**數理人文**，第 4 期，頁 82-84。
40. 高湧泉，2008，**武士與旅人：續科學筆記**，初版，三民書局。
41. Vanvaerenbergh, M., 2003, *Line of Position Navigation: Sumner and Saint Hilaire the Two Pillars of Modern Celestial Navigation*, Replica Books.